Calcul de la longueur d'un arc de parabole

Soit $\mathcal{P}$ une parabole, d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormé $(0; \imath, \jmath)$.
Adoptons le paramétrage $f : t \in \mathbb{R} \mapsto (x = t^2/2p, y = t)$. Ce paramétrage est simple.
Nous avons $\overrightarrow{f}'(t) = (t/p, 1)$ donc

$$\|\overrightarrow{f}'(t)\| = \sqrt{\frac{t^2}{p^2} + 1} = \frac{\sqrt{t^2 + p^2}}{p}$$

Notons $L : y \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^y \frac{\sqrt{t^2 + p^2}}{p}\, dt$.
Le changement de variable $u = t/p$ nous donne

$$L(y) = p \int_0^{y/p} \sqrt{1 + u^2}\, du$$

Appliquons maintenant le changement de variable $v = \operatorname{argsh}(u)$, équivalent à $u = \operatorname{sh}(v)$; la formule $\operatorname{ch}^2(v) - \operatorname{sh}^2(v) = 1$ nous donne

$$L(y) = p \int_0^{\operatorname{argsh}(y/p)} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(v)}\, \operatorname{ch}(v)\, dv = p \int_0^{\operatorname{argsh}(y/p)} \operatorname{ch}^2(v)\, dv$$

Mais

$$\operatorname{ch}^2(v) = \Big(\frac{e^v + e^{-v}}{2}\Big)^2 = \frac{e^{2v} + e^{-2v} + 2}{4} = \frac{1 + \operatorname{ch}(2v)}{2}$$

Nous en déduisons

$$L(y) = \frac{p}{2} \int_0^{\operatorname{argsh}(y/p)} \big(1 + \operatorname{ch}(2v)\big)\, dv = \frac{p}{2}\Big[v + \frac{\operatorname{sh}(2v)}{2}\Big]_0^{\operatorname{argsh}(y/p)} = \frac{p \operatorname{argsh}(y/p)}{2} + \frac{p \operatorname{sh}\big(2 \operatorname{argsh}(y/p)\big)}{4}$$

Notons $x = \operatorname{argsh}(y/p)$, et utilisons les formules $\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)$, $\operatorname{sh}\big(\operatorname{argsh}(y/p)\big) = y/p$ et $\operatorname{ch}(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(x)} = \sqrt{1 + \dfrac{y^2}{p^2}}$; il vient

$$\operatorname{sh}\big(2 \operatorname{argsh}(x)\big) = \frac{2y}{p}\sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} = \frac{2y\sqrt{y^2 + p^2}}{p^2}$$

En remplaçant x par $\operatorname{argsh}(y/p)$, nous obtenons finalement

$$L(y) = \frac{p \operatorname{argsh}(y/p)}{2} + \frac{y\sqrt{y^2 + p^2}}{2p}$$

Soient a et b deux réels, avec $a \leqslant b$; la longueur de l'arc de parabole compris entre les points de paramètres respectifs a et b est alors $L(b) - L(a)$.