Intégration

Table des matières

---

1 Subdivisions d'un segment

Définition : soit $n \in \mathbb{N}^*$; un *partage* (ou *subdivision*) d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ en n sous-intervalles est une fonction strictement croissante s de $[\![1, n]\!]$ dans $[a, b]$ telle que $s(0) = a$ et $s(n) = b$. Notons x_k l'image de $k \in [\![1, n]\!]$, et $s = (x_0, \ldots, x_n)$.

Définition : le *module* d'une subdivision $s = (x_0, \ldots, x_n)$ est $\mu(s) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k - x_{k-1}|$. On a donc $\mu(s) \leqslant b - a$ et, si $b > a$, $\mu(s) > 0$.

Définition : soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, avec $p > n$; t une subdivision de $[a, b]$ en p sous-intervalles, et s une subdivision de $[a, b]$ en n sous-intervalles. Nous dirons que t est *plus fine* que s s'il existe une injection ϕ de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$ telle que $s = t \circ \phi$. Les points x_j de la subdivision s apparaissent donc parmi les points y_k de la subdivision t, éventuellement séparés par des points de cette dernière : $x_k = y_{\phi(k)}$.

Proposition : si t est plus fine que s, alors $\mu(t) \leqslant \mu(s)$.

Proposition : si s et t sont deux subdivisions de $[a, b]$, il existe une subdivision u et une seule, plus fine que s et que t, et moins fine que toute subdivision plus fine que s et que t.

Définition : une subdivision s de $[a, b]$ en n sous-intervalles est *à pas constant* si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$; le pas de la subdivision est $h = \dfrac{b-a}{n}$ et bien entendu $\mu(s) = h$.

2 Algèbre des fonctions en escalier sur $[a, b]$

Définition : une fonction f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est *en escalier* s'il existe une subdivision s de $[a, b]$ en n sous-intervalles, telle que la restriction de f à chaque sous-intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ soit constante. On dit aussi : f est *constante par morceaux.*

Soit f en escalier sur $[a, b]$. Une subdivision $s = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ est *adaptée* à f si, pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, la restriction de f à $]x_{k-1}, x_k[$ est constante .

Proposition : l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est une sous-algèbre de l'ensemble des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Définition: soit f en escalier sur $[a,b]$ et s une subdivision adaptée. Notons c_k la valeur constante de f sur chaque intervalle $]x_{k-1},x_k[$. L'intégrale de f sur $[a,b]$, notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, est $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})c_k$. Cette définition est intrinsèque: elle ne dépend pas de la subdivision adaptée choisie.

Proposition: la fonction $f \to \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est une forme linéaire sur l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$; elle est croissante, en ce sens que, si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$.

Définition: si $a>b$, on pose $\displaystyle\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$

Proposition: soient a,b, c trois réels, et f en escalier sur l'intervalle $\big(\min(a,b,c),\max(a,b,c)\big)$. Alors $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$

3 Sommes de Darboux

Proposition: l'ensemble des fonctions bornées de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est une sous-algèbre de l'ensemble des fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Définition: soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ bornée, et $s=(x_0,\dots,x_n)$ une subdivision de $[a,b]$. Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, notons m_k la borne inférieure de f et M_k la borne supérieure de f sur l'intervalle $[x_{k-1},x_k]$. On définit les *sommes de Darboux* $S_-(f,a,b,s)$ et $S^+(f,a,b,s)$ relatives à f et à la subdivision s de $[a,b]$ par:

$$S_-(f,a,b,s)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})m_k \qquad S_+(f,a,b,s)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})M_k$$

On a, de façon évidente: $S_-(f,a,b,s)\leqslant S^+(f,a,b,s)$. Si f est en escalier sur $[a,b]$, alors $S_-(f,a,b,s)=S^+(f,a,b,s)=\int_a^b f(t)\,dt$.

Proposition: si t est une subdivision de $[a,b]$ plus fine que s, alors:

$$S_-(f,a,b,s)\leqslant S_-(f,a,b,t) \qquad \text{et} \qquad S^+(f,a,b,s)\geqslant S^+(f,a,b,t)$$

Notons $I_-(f,a,b)$ et $I^+(f,a,b)$ respectivement la borne supérieure des $S_-(f,a,b,s)$ et la borne inférieure des $S^+(f,a,b,s)$, lorsque s décrit l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a,b]$.
Nous avons évidemment $I_-(f,a,b)\leqslant I^+(f,a,b)$.

Proposition: $I_-(f,a,b)$ estla borne supérieure et la borne inférieure des $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ lorsque g décrit l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui minorent f. Même énoncé en remplaçant I_- par I^+, et «minorent» par «majorent».

Définition: on dit que f est *intégrable* sur $[a,b]$ lorsque $I_-(f,a,b)=I^+(f,a,b)$, la valeur commune est l'intégrale de f sur $[a,b]$, notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. On remarque qu'une fonction en escalier sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$, et que l'intégrale que l'on vient de définir est la même que celle définie plus haut.

Proposition: f est intégrable sur $[a,b]$ ssi $\forall\varepsilon>0$ il existe une subdivision s de $[a,b]$ telle que $S^+(f,a,b,s)-S_-(f,a,b,s)\leqslant\varepsilon$.

Proposition: la fonction $f\mapsto\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est une forme linéaire sur l'ensemble des fonctions bornées de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$; elle est croissante, en ce sens que, si $f\leqslant g$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\leqslant\int_a^b g(t)\,dt$.

Proposition: si f et g sont intégrables sur $[a,b]$, alors fg l'est aussi.

Preuve: en utilisant la linéarité, on peut supposer f et g positives. Soient $A>0$ et $B>0$ tels que $f\leqslant A$ et $g\leqslant B$. Soient s et t des subdivisions de $[a,b]$ telles que $S^+(f,a,b,s)-S_-(f,a,b,s)\leqslant\frac{\varepsilon}{2B}$ et $S^+(g,a,b,s)-S_-(g,a,b,s)\leqslant\frac{\varepsilon}{2A}$. Soit u plus fine que s et t, alors

$$\begin{aligned}
S^+(fg,a,b,u) - S_-(fg,a,b,u) &= \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})(\sup_k fg - \inf_k fg) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})(\sup_k f \sup_k g - \inf_k f \inf_k g) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})\big[\sup_k f(sup_k g - \inf_k g) + (sup_k f - \inf_k f)\inf_k g\big] \\
&\leq A\frac{\varepsilon}{2A} + B\frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Proposition : si f est intégrable sur $[a,b]$, alors $|f|$ l'est aussi, et $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Définition : si $a > b$, on pose $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$

Proposition : soient a, b, c trois réels, et f bornée et intégrable sur $\big(\min(a,b,c), \max(a,b,c)\big)$. Alors :

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$

4 Exemples de fonctions intégrables ou non

Ex : la fonction caractéristique de $\mathbb{Q} \cap [a,b]$ n'est pas intégrable ; en effet, sur tout intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ d'amplitude non nulle, on aura $m_k = 0$ et $M_k = 1$. Donc $I_-(f,a,b) = 0$ et $I^+(f,a,b) = b - a$.

Proposition : toute fonction monotone est intégrable.

Proposition : toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable.

Proposition : si f est continue sur $[a,b]$ et de signe constant, et si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, alors $f = 0$.

Proposition : toute fonction continue par morceaux est intégrable.

5 Sommes de Riemann. Méthodes numériques

Définition : soit f définie sur $[a,b]$ et $s = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$. Choisissons, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, un élément ξ_k de $[x_{k-1}, x_k]$. La somme de Riemann associée à f, à la subdivision s, et au choix $(\xi_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ de points, est la quantité $S_n(f,a,b) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(\xi_k)$.

Proposition : soit f intégrable sur $[a,b]$; pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision s de $[a,b]$ de module inférieur à η, et tout choix ξ de points dans cette subdivision, la différence entre $\int_a^b f(t)\,dt$ et la somme de Riemann associée à f, à s et au choix ξ, soit, en valeur absolue, inférieure à ε.
En particulier, si, pour chaque $n > 0$ on considère la subdivision à pas constant $h = \frac{b-a}{n}$ et un choix quelconque, la suite des sommes de Riemann $S_n(f,a,b)$ associées tend vers $\int_a^b f(t)\,dt$ quand $n \to \infty$.

Définition : soit $n \in \mathbb{N}^*$, et f intégrable sur $[a,b]$. La méthode de Newton-Cotes consiste à approcher $\int_a^b f(t)\,dt$ par $\int_a^b P_n(t)\,dt$ où P_n est le polynôme d'interpolation de Lagrange, de degré n, qui prend même valeur que f en chacun des $n+1$ points de la subdivision à pas constant $\frac{b-a}{n}$.

Pour $n=1$, on approche $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ par $\dfrac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big)$, ce qui donne la *méthode des trapèzes.*

Pour $n=2$, on approche par $\dfrac{b-a}{6}\Big(f(a)+4f\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)+f(b)\Big)$, ce qui donne la *méthode de* Simpson.

Pour $n=0$, on convient en général d'évaluer f au point milieu, donc d'approcher par $(b-a)f\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)$, ce qui donne la *méthode des rectangles médians.* Notons que le résultat obtenu est le même que celui fourni par la méthode de la *tangente médiane*, pour une fonction f dérivable sur $[a,b]$, laquelle consiste à poser $g(t)=g(m)+g'(m)(t-m)$, avec $m=\dfrac{a+b}{2}$, et à approcher $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ par $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$.

6 Primitives ; intégrale fonction de la borne supérieure

Définition : soit f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$; F, définie sur I, est une *primitive* de f lorsque $F'=f$.

Proposition : si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors l'ensemble des primitives de f sur $[a,b]$ est l'ensemble des $F+C$ où C décrit l'ensemble des fonctions constantes.

Considérons la relation $\sim$ définie par : $F\sim G$ lorsque $F-G$ est une constante. On note $\displaystyle\int f(t)\,dt$ la classe d'équivalence constituée des primitives de f. On calcule sur ces classes comme sur les fonctions.

Proposition : si f est continue sur $[a,b]$, alors $x\to\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est *la* primitive de f sur $[a,b]$ qui s'annule en a.

Définition : la *variation* de F entre a et b est la quantité $F(b)-F(a)$, notée $\big[F(t)\big]_a^b$. On a donc, si f est continue sur $[a,b]$: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt=\big(F(t)\big)_a^b$ pour toute primitive F de f.

7 Formule de la moyenne, inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition : soit f continue sur $[a,b]$, et g intégrable et positive sur $[a,b]$. Alors :

$$\exists c\in]a,b[:\ \int_a^b f(t)g(t)\,dt=f(c)\int_a^b g(t)\,dt$$

Proposition : soient f et g intégrables sur $[a,b]$. Alors :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2\leqslant\left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\times\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right)$$

8 Changement de variable

Proposition : soient : f une fonction continue sur $[a,b]$; F une primitive de f sur $[a,b]$; g une bijection continue et dérivable de $[\alpha,\beta]$ sur $[a,b]$. Alors $F'=f$, puis $(F\circ g)'=g'\times(f\circ g)$. Ainsi, $F\circ g$ est une primitive de $g'\times(f\circ g)$ sur $[\alpha,\beta]$. Avec g croissante, il vient :

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)\,du=\int_a^b F'(u)\,du=F(b)-F(a)=(F\circ g)(\beta)-(F\circ g)(\alpha)=\int_\alpha^\beta (f\circ g)(t)g'(t)\,dt$$

Formellement, ceci revient à écrire :

$$\int_\alpha^\beta f\big[g(t)\big]g'(t)\,dt=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)\,du$$

donc, à poser $u=g(t)$, $du=g'(t)\,dt$, et à remplacer les bornes de l'intervalle d'intégration par leurs images respectives par g. On dit qu'on a effectué le *changement de variable* $u=g(t)$.

Proposition : si f est continue sur $[-a,a]$ et paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,dt=2\int_0^a f(t)\,dt$.

Proposition : si f est continue sur $[-a, a]$ et impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 0$.

Proposition : si f est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique, alors $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(t)\, dt$ est indépendant de a.

9 Intégration par parties. Formule de Taylor avec reste intégral

Proposition : si u et v sont dérivables sur un même intervalle I, alors $\int u(t)v'(t)\, dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)\, dt$. Formellement, $\int u\, dv = uv - \int v\, du$. Si $I = [a, b]$, alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\, dt = \big[u(t)v(t)\big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\, dt$$

Proposition : soit f définie et de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^k(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Proposition : dans les mêmes conditions, en notant $M_{n+1} = \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} \left| f^{(n+1)}(t) \right|$, nous avons l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^k(a) \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

FIN