Formulaire de trigonométrie circulaire

Attention ! Ceci est la version 2 du formulaire : elle corrige quelques erreurs. Merci d'en tenir compte.

Résultats admis : $e^{ia} = \cos(a) + i\sin(a)$; $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$.
Nous en déduisons $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$; mais aussi :

$$\begin{aligned} e^{i(a+b)} &= e^{ia} \times e^{ib} = \big(\cos(a) + i\sin(a)\big) \times \big(\cos(b) + i\sin(b)\big) \\ e^{i(a-b)} &= e^{ia} \times e^{-ib} = \big(\cos(a) + i\sin(a)\big) \times \big(\cos(b) - i\sin(b)\big) \end{aligned}$$

D'où les formules :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \end{aligned}$$

Avec ce qui précède, transformons les produits en sommes :

$$\begin{aligned} \cos(p)\cos(q) &= \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \\ \sin(p)\sin(q) &= \frac{\cos(p-q) - \cos(p+q)}{2} \\ \sin(p)\cos(q) &= \frac{\sin(p+q) + \sin(p-q)}{2} \end{aligned}$$

Et maintenant, transformons les sommes en produits :

$$\begin{aligned} \cos(p) + \cos(q) &= 2\cos\Big(\frac{p+q}{2}\Big)\cos\Big(\frac{p-q}{2}\Big) \\ \cos(p) - \cos(q) &= -2\sin\Big(\frac{p-q}{2}\Big)\sin\Big(\frac{p+q}{2}\Big) \\ \sin(p) + \sin(q) &= 2\sin\Big(\frac{p+q}{2}\Big)\cos\Big(\frac{p-q}{2}\Big) \\ \sin(p) - \sin(q) &= 2\cos\Big(\frac{p+q}{2}\Big)\sin\Big(\frac{p-q}{2}\Big) \end{aligned}$$

Formules de duplication :
$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$; $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$.
Autres formules relatives à sin et cos :
$\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$; $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$; $\tan^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$;
Formules relatives à la fonction tan :
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$; $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$; $\tan' a) = 1 + \tan^2(a) = \dfrac{1}{\cos^2(a)}$.
En vrac : $\sin(a+\pi) = -\sin(a)$; $\sin(\pi-a) = \sin(a)$; $\sin(\pi/2-a) = \cos(a)$; $\sin(a+\pi/2) = \cos(a)$; $\cos(a+\pi) = -\cos(a)$; $\cos(\pi-a) = -\cos(a)$; $\cos(\pi/2-a) = \sin(a)$; $\cos(a-\pi/2) = \sin(a)$; $\cos(a+\pi/2) = -\sin(a)$;

FIN