# Espaces euclidiens

## Table des matières



---

## 1 Définitions et exemples

**Définition** : soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. ; une *forme linéaire* sur $E$ est une application linéaire de $E$ dans $\mathbb{K}$. Une *forme bilinéaire* sur $E$ est une fonction $\varphi$ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$, vérifiant $\varphi(u, v + \lambda w) = \varphi(u, v) + \lambda\varphi(u, w)$ et $\varphi(u + \lambda v, w) = \varphi(u, w) + \lambda\varphi(v, w)$ quels que soient les vecteurs $u$, $v$, $w$ et le scalaire $\lambda$. Une telle forme est *symétrique* si $\varphi(v, u) = \varphi(u, v)$ quels que soient les vecteurs $u$ et $v$.

**Définition** : soit $E$ un $\mathbb{R}$-e.v. Un *produit scalaire* sur $E$ est une forme bilinéaire symétrique $\varphi$ vérifiant : (i) $\forall u \in E : \varphi(u) \geqslant 0$ ; et (ii) $\varphi(u) = 0 \Rightarrow u = \vec{0}$.

Nous noterons fréquemment $\langle u, v\rangle$ ou $\langle u|v\rangle$ ou $u \cdot v$ le produit scalaire $\varphi(u, v)$.

**Exemple** : $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-e.v. peut être muni du produit scalaire ≪naturel≫ défini par $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$.

**Exemple** : soient $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ des réels deux à deux distincts. Nous définissons sur $\mathbb{R}_n[X]$ un produit scalaire par $\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P(x_i).Q(x_i)$. La propriété (ii) s'établit en notant que, si $\langle P, P\rangle = 0$, alors $P^2$ (donc aussi $P$) possède au moins $n + 1$ racines distinctes, donc, étant de degré $n$ au plus, doit être le polynôme nul.

**Exemple** : sur $\mathcal{C}\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ nous définissons un produit scalaire par $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. La propriété (ii) est un résultat du cours de calcul intégral.

## 2 Orthogonalité, norme euclidienne

$E$ est un $\mathbb{R}$-e.v. muni d'un produit scalaire $\varphi$.

**Définition** : deux vecteurs $x$ et $y$ de $E$ sont *orthogonaux* lorsque $\varphi(u, v) = 0$. Si $E$ est muni de plusieurs produits scalaires, il faudra préciser celui vis-à-vis duquel $u$ et $v$ sont orthogonaux.

**Proposition** : toute famille $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs non nuls et deux à deux orthogonaux de $E$ est libre.

**Preuve** : soit $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de scalaires telle que $\sum \lambda_i u_i = \vec{0}$. Alors la somme $\left(\sum \lambda_i u_i\right)^2 = \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} {\lambda_i}^2 \|u_i\|^2$ est nulle, donc les ${\lambda_i}^2$ sont tous nuls.

**Définition** : la *norme euclidienne* associée au produit scalaire $\varphi$ est la fonction $x \in E \mapsto \sqrt{\varphi(u, u)}$. La norme du vecteur $u$ est notée $N(u)$, $\|u\|_2$ ou même $\|u\|$ si aucune confusion n'est à craindre. Les propriétés suivantes d'une norme euclidienne sont immédiates :

$$\|u\| \geqslant 0 \qquad \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0 \qquad \|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$$

**Définition** : un vecteur $u$ d'un $\mathbb{R}$-e.v. muni d'un produit scalaire est *normé* (ou *unitaire*) si $\|u\| = 1$.

**Proposition** : (identité du parallélogramme) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.

**Remarque** : $\varphi(u, v) = \dfrac{\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2} = \dfrac{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2}{4}$ (identités de polarisation).

**Théorème (inégalité de Schwarz)** : pour tous vecteurs $x$ et $y$ de $E$, on a $\varphi(u, v) \leqslant \|x\| \times \|v\|$. L'égalité a lieu ssi $u$ et $v$ sont liés.

**Preuve** : examiner le discriminant du trinôme $\lambda \mapsto \|u + \lambda v\|^2$.

**Proposition** : les dex *inégalités triangulaires* $\|u+v\| \leqslant \|u\|+\|v\|$ et $\big|\|u\|-\|v\|\big| \leqslant \|u-v\|$ sont des conséquences immédates du résultat précédent. Le cas d'égalité est obtenu lorsque $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$, avec $\lambda > 0$.

**Théorème (de Pythagore)** : deux vecteurs $u$ et $v$ de $E$ sont orthogonaux ssi $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$.

Généralisation : si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille de vecteurs deux à deux orthogonaux de $E$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|^2 = \left|\sum_{i=1}^{n} u_i\right|^2$$

Bien noter que la réciproque est fausse, pour $n \geqslant 3$ ; un contre-exemple simple est la famille $a = (1, 0)$, $b = (1, \sqrt{3})$ et $c = (1, -\sqrt{3})$.

## 3 Espaces euclidiens, bases orthonormées

**Définition** : un *espace euclidien* est un couple $(E, \varphi)$ où $E$ est un $\mathbb{R}$-e.v. *de dimension finie* et $\varphi$ un produit scalaire sur $E$.

**Définition** : une base $\mathcal{U} = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'une espace euclidien de dimension $n$ est *orthogonale* si ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux ; elle est *orthonormée* (ou *orthonormale*) si de plus tous ses vecteurs sont normés.

**Remarque** : les vecteurs d'une base orthonormée vérifient $u_i \cdot u_j = \delta_{i,j}$.

**Proposition** : soient $(E, \varphi)$ un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de $E$. Soient $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i e_i$ deux vecteurs de $E$ ; notons $X$ et $Y$ les éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associés à $x$ et $y$. Alors $\varphi(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i = X^T \cdot Y$ et $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2} = \sqrt{X^T \cdot X}$.

**Remarque** : un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension infinie, muni d'un produit scalaire, est un *espace préhilbertien.*

## 4 Orthogonalisation de Schmidt

Le procédé de SCHMIDT permet de construire, à partir d'une base quelconque $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'un espace euclidien $(E,\varphi)$, une base orthonormée $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ vérifiant de plus $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)=\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_k)$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$. Nous ne décrirons que l'orthogonalisation.

Notons $v_1=u_1$. Si $\dim(E)=1$ c'est fini. Sinon, notons $\lambda_{1,2}=\dfrac{\varphi(u_2,v_1)}{\varphi(v_1,v_1)}$ puis $v_2=u_2-\lambda_{1,2}v_1$ : $v_2$ est orthogonal à $v_1$. Supposons obtenue la famille orthogonale $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$, vérifiant $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_k)=\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_k)$. Notons $\lambda_{i,k}=\dfrac{\varphi(u_{k+1},v_i)}{\varphi(v_i,v_i)}$ pour tout $i\in[\![1,k]\!]$, puis $v_{k+1}=u_{k+1}-\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\lambda_{i,k}v_i$. Alors $\varphi(v_{k+1},v_i)=0$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$. On vérifie aisément que $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_{k+1})=\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_{k+1})$. En répétant $n$ fois l'opération nous obtenons bien une base $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ orthogonale de $E$.

**Théorème** : tout espace euclidien possède des bases orthonormées.

**Preuve** : nous venons de donner une preuve *constructive* de ce résultat.

## 5 Sous-espaces orthogonaux

**Définition** : soient $F$ et $G$ deux s.e.v. d'un même espace euclidien $E$. Nous dirons que $F$ et $G$ sont *orthogonaux* si tout vecteur de $F$ est orthogonal à tout vecteur de $G$.

**Proposition** : deux s.e.v. orthogonaux sont en somme directe.

**Preuve** : si $x\in F\cap G$, alors $\varphi(x,x)=0$.

## 6 Orthogonal d'un sous-espace

**Définition** : soit $F$ une partie non vide de $E$. Un vecteur $x$ de $E$ est orthogonal à $F$ s'il est orthogonal à tout vecteur de $F$. L'ensemble des vecteurs de $E$ orthogonaux à $F$, noté $F^\perp$, est l'*orthogonal* de $F$.

**Proposition** : $F^\perp$ est un s.e.v. de $E$ ; si $F\subset G$, alors $G^\perp\subset F^\perp$.

**Preuve** : $\vec{0}$ est dans $F^\perp$. Soient $u,v\in F^\perp$, $\lambda\in\mathbb{R}$ et $x\in F$ : $(u+\lambda v)\cdot x=u\cdot x+\lambda v\cdot x=0$, donc $u+\lambda v\in F^\perp$. Soit $u\in G^\perp$ : $u$ est orthogonal à tout vecteur de $G$, donc à tout vecteur de $F$, et par suite $u\in F^\perp$.

**Définition** : deux s.e.f. $F$ et $G$ de $E$ sont *supplémentaires orthogonaux* s'ils sont supplémentaires l'un de l'autre et si de plus tout vecteur de $F$ est orthogonal à tout vecteur de $G$.

**Proposition** : si $F$ est un s.e.v. de $E$, alors $F$ et $F^\perp$ sont supplémentaires orthogonaux.

**Preuve** : si $F=\{\vec{0}\}$ ou $F=E$, la question est réglée. Sinon, notons $p=\dim(F)$ : $1\leqslant p<n$, où $n=\dim(E)$. Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base orthonormée de $F$ ; complétons-la par des vecteurs $e_{p+1},\dots,e_n$ pour obtenir une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $E$. Notons $G=\mathrm{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)$ et montrons que $G=F^\perp$. L'inclusion $G\subset F^\perp$ est immédiate : les vecteurs $e_{p+1},\dots,e_n$ sont orthogonaux à tout vecteur de $F$, donc sont dans $F^\perp$ ; donc toute combinaison linéaire de ces vecteurs est dans $F^\perp$. Prouvons l'inclusion inverse : soit $x\in F^\perp$, de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$ dans $\mathcal{B}$ ; pour $i\in[\![1,p]\!]$, nous aurons $x\cdot e_i=\displaystyle\sum_{1\leqslant j\leqslant n}x_je_j\cdot e_i=\sum_{p+1\leqslant j\leqslant n}x_je_j\cdot e_i$ puisque les $e_i$ d'indice au plus $p$ sont dans $F$. Donc $x\in G$.

**Remarque** : $F$ et $F^\perp$ sont supplémentaires orthogonaux. Par raison de symétrie, nous en déduisons $(F^\perp)^\perp=F$.

**Proposition** : l'orthogonal d'un vecteur $u$ non nul est un hyperplan.

**Preuve** : l'orthogonal de $u$ est le noyau de la forme linéaire $f_u : x\mapsto\varphi(u,x)$, laquelle est non nulle car $f_u(u)=\varphi(u,u)\neq 0$.

## 7 Matrice du produit scalaire dans une base quelconque

**Définition** : soient $E$ un espace euclidien de dimension $n$ et $\mathcal{B}=(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base de $E$. La matrice $A$, carrée d'ordre $n$, définie par $A_{i,j}=\varphi(e_i,e_j)$ est la *matrice de $\varphi$ dans la base $\mathcal{B}$*. Elle est symétrique et ses coefficients diagonaux sont strictement positifs.

**Exemple** : la matrice du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $I_n$.

**Exemple** : dans le $\mathbb{R}$-e.v. des fonctions polynômes de degré au plus $n$, la matrice du produit scalaire défini par $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_{[0,1]} fg$ est la matrice de HILBERT d'ordre $n+1$, définie par $H_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

**Proposition** : soient $u$ et $v$ deux vecteurs de $E$, représentés respectivement dans $\mathcal{B}$ par les matrices-colonnes $U$ et $V$ ; on a $\varphi(u,v) = U^T \cdot A \cdot V$.

**Preuve** : $\varphi(u,v) = \left(\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant n} u_i e_i\right) \times \left(\displaystyle\sum_{1\leqslant j\leqslant n} v_j e_j\right) = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} u_i v_j \varphi(e_i,e_j) = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} u_i v_j A_{i,j}$. Par ailleurs :

$$U^T \cdot A \cdot V = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} (U^T)_i (A\cdot V)_i = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} u_i \sum_{1\leqslant j\leqslant n} A_{i,j} v_j = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} u_i v_j A_{i,j}$$

# 8 Endomorphismes orthogonaux

**Définition** : un endomorphisme $g$ d'un espace euclidien $(E,\varphi)$ est *orthogonal* lorsqu'il conserve le produit scalaire, c'est-àdire lorsque $\varphi\left(g(u),g(v)\right) = \varphi(u,v)$ quels que soient les vecteurs $u$ et $v$ de $E$.

**Théorème** : soit $g$ un endomorphisme d'un espace euclidien $(E,\varphi)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $g$ conserve le produit scalaire
2. $g$ conserve la norme euclidienne, c'est-à-dire $\|g(u)\| = \|u\|$ pour tout $u \in E$
3. il existe une base orthonormée de $E$ dont l'image par $g$ est une base orthonormée de $E$
4. l'image par $g$ de n'importe quelle base orthonormée de $E$ est également une base orthonormée de $E$

**Preuve** : (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) est immédiat ; (3) $\Rightarrow$ (2) : utiliser l'expression de $\|x\|$ dans une base orthonormée ; utiliser l'identité de polarisation pour (2) $\Rightarrow$ (1).

**Proposition** : tout endomorphisme orthogonal $g$ d'un espace euclidien $E$ est bijectif.

**Preuve** : $g(u) = \vec{0} \Rightarrow N\big(g(u)\big) = 0 \Rightarrow N(u) = 0 \Rightarrow u = \vec{0}$ ; donc $f$ est injectif. Comme $E$ est de dimension finie, $g$ est bijectif.

**Proposition** : l'ensemble $O(E)$ des automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien $E$ est un groupe pour la composition des applications.

**Preuve** : $\mathrm{id}_E$ est un automorphisme orthogonal de $E$, donc $O(E)$ n'est pas vide. Il est clair $O(E)$ est stable par composition. Enfin, soit $f \in O(E)$ ; $f$ est bijectif et orthogonal, donc $f^{-1}$ est un automorphisme ; de plus $\big\|f^{-1}(x)\big\| = \big\|f\big(f^{-1}(x)\big)\big\| = \|x\|$ donc $f^{-1}$ est orthogonal.

**Définition** : $O(E)$ est le *groupe orthogonal* de $E$.

# 9 Matrices orthogonales

**Définition** : une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *orthogonale* si c'est la matrice dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ d'un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne naturelle. Il est immédiat qu'une telle matrice est inversible, et que l'ensemble de ces matrices est un groupe multiplicatif, noté $O(n)$.

**Théorème** : une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale ssi $A^{-1} = A^T$.

**Preuve** : soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $g$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ représenté par $A$ dans $\mathcal{B}$. Comme $g$ est orthogonal, les colonnes de $A$ forment elles aussi une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$, soit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{k,i}A_{k,j} = \delta_{i,j}$ pour tous $i$ et $j$ ; donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (A^T)_{i,k}A_{k,j} = \delta_{i,j}$, donc $A^T \times A = I_n$, puis $A^T = A^{-1}$. La réciproque est immédiate.

**Proposition** : soient $E$ un espace euclidien de dimension $n$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $E$. Un endomorphisme $g$ de $E$ est orthogonal ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ est orthogonale.

**Proposition** : soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormées d'un même espace euclidien $E$, et $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Si $x \in E$ est représenté dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$) par $X$ (resp. $Y$), alors $X = P^T \cdot Y \cdot P$.

**Preuve** : $P$ est orthogonale.

## 10 Projections et symétries orthogonales

**Définition** : un projecteur $p$ d'un espace euclidien est *orthogonal* si $\ker(p)$ et $\mathrm{im}(p)$ sont supplémentaires orthogonaux. La *base* de $p$ est $\mathrm{im}(p)$, sa *direction* est $\ker(p)$.

**Remarque** : à l'exception du projecteur identité, un projecteur orthogonal n'est *jamais* un automorphisme orthogonal.

**Définition** : une symétrie $s$ d'un espace euclidien est *orthogonale* si $\ker(s-\mathrm{id})$ et $\ker(s+\mathrm{id})$ sont supplémentaires orthogonaux. La *base* de $s$ est $\ker(s-\mathrm{id})$, sa *direction* est $\ker(s+\mathrm{id})$.

**Définition** : une *réflexion* de $E$ est une symétrie orthogonale dont la base est un hyperplan.

**Définition** : la *normale* à un hyperplan $H$ d'un espace euclidien $E$ est la droite (s.e.v. de dimension 1) supplémentaire orthogonal de $H$. Soit $u$ un vecteur directeur de cette droite (donc un vecteur normal à $H$), et $f_u$ comme ci-dessus ; $f_u(v) = 0$ est une *équation normale* de $H$.
**Remarque** : si $u$ est unitaire et normal à l'hyperplan $H$, alors la réflexion de base $H$ est $x \mapsto x - 2(x \cdot u)u$.

## 11 Distance d'un vecteur à un s.e.v

**Définition** : soient $F$ un s.e.v. d'un espace euclidien $E$ et $u$ un vecteur de $E$. La *distance* de $u$ à $F$, notée $d(u, F)$ est $\inf\limits_{v \in F} \|u - v\|$.

**Proposition** : $d(u, F)$ est atteint en prenant pour $v$ le projeté orthogonal de $u$ sur $F$.

**Preuve** : c'est une conséquence du théorème de Pythagore.

**FIN**