Espaces vectoriels et algèbres

Table des matières

$\mathbb{K}$ désigne l'un des corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou l'un de leurs sous-corps. Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés *scalaires*. Nous noterons $\mathbf{1}$ l'unité du corps.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition : un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$-e.v. dans la suite) est un triplet $(E,+,\bullet)$ où :

1. E est un ensemble (non vide) d'objets appelés *vecteurs*
2. $(E,+)$ est un groupe commutatif
3. $\bullet$ désigne une fonction de $\mathbb{K}\times E$ dans E

L'élément neutre du groupe $(E,+)$ est appelé *vecteur nul* et noté $\vec{0}$.
Nous noterons $\lambda\bullet\vec{u}$ au lieu de $\bullet(\lambda,\vec{u})$. La fonction $\bullet$ doit vérifier les propriétés suivantes :

1. $\forall(\lambda,\mu,\vec{u})\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times E : (\lambda+\mu)\bullet\vec{u}=\lambda\bullet\vec{u}+\mu\bullet\vec{u}$
2. $\forall(\mu,\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{K}\times E\times E : \lambda\bullet(\vec{u}+\vec{v})=(\lambda\bullet\vec{u})+(\lambda\bullet\vec{v})$
3. $\forall(\lambda,\mu,\vec{u})\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times E : \lambda\bullet(\mu\bullet\vec{u})=(\lambda\mu)\bullet\vec{v}$
4. $\forall\vec{v}\in E : \mathbf{1}\bullet\vec{u}=\vec{u}$

Nous considérerons désormais $\bullet$ comme une opération : elle permet de multiplier le vecteur $\vec{u}$ par le scalaire λ.

1.2 Exemples

$\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-e.v. muni de son addition, et de la fonction qui définit sa multiplication.

$\mathbb{K}^n$ est muni d'une structure naturelle de $\mathbb{K}$-e.v. en définissant la somme par $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, et l'opération de $\mathbb{K}$ par $\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.

Si E est un $\mathbb{K}$-e.v. et A un ensemble quelconque, l'ensemble $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ des fonctions de E dans $\mathbb{K}$ peut être muni d'une structure naturelle de $\mathbb{K}$-e.v. : l'addition est définie usuellement par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout x de A ; et, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit λf par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Notons que le deuxième exemple n'est qu'un cas particulier de celui-ci, car un élément de $\mathbb{K}^n$ est une fonction de $[\![1, n]\!]$ dans $\mathbb{K}$.

$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-e.v., mais aussi un $\mathbb{R}$-e.v. Plus généralement, si $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$, alors $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{L}$-e.v.

1.3 Règles de calcul dans un $\mathbb{K}$-e.v.

Proposition : $\forall \vec{u} \in E : 0 \bullet \vec{u} = \vec{0}$.

Proposition : $\forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda \bullet \vec{0} = \vec{0}$.

Proposition : $\forall (\lambda, \vec{u}) \in \mathbb{K} \times E : (-\lambda) \bullet \vec{u} = \lambda \bullet (-\vec{u}) = -(\lambda \bullet \vec{u})$. En particulier, $(-1) \bullet \vec{u} = -\vec{u}$.

Proposition : $\lambda \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

1.4 Combinaisons linéaires

Définition : soient $n \geqslant 1$, $\mathcal{V} = (\vec{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de vecteurs de E, et $\lambda = (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de scalaires. La *combinaison linéaire* de la famille $\mathcal{V}$ par les coefficients de la famille λ est le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bullet v_i$.

Définition : une famille finie $\mathcal{V} = (\vec{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de vecteurs de E est *liée* s'il en existe une combinaison linéaire nulle par une famille de scalaires à coefficients non tous nuls ; on dit aussi que les vecteurs de la famille sont *liés* ou *dépendants*. Sinon, elle est dite *libre* ; on dit aussi que les vecteurs de la famille sont *indépendants*.

Définition : une famille quelconque $\mathcal{V} = (\vec{v}_i)_{i \in I}$ est libre si toute sous-famille finie de $\mathcal{V}$ est libre ; elle est liée s'il en existe au moins une sous-famille finie liée.

Remarque — toute famille contenant $\vec{0}$ est liée ; toute famille contenant deux vecteurs égaux est liée ; toute sous-famille d'une famille libre est libre ; toute famille dont une sous-famille est liée est elle-même liée.

Proposition : une famille $\mathcal{V} = (\vec{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est liée ssi l'un au moins des $\vec{v}_i$ est combinaison linéaire des autres éléments de la famille.

Proposition : une famille $\mathcal{V} = (\vec{v}_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre ssi $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bullet \vec{v}_i = \vec{0}$ implique $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition et caractérisations

Définition : une partie G d'un $\mathbb{K}$-e.v. E est un *sous-espace vectoriel* de E (en abrégé : un s.e.v.) si :

1. $(G, +)$ est un sous-groupe du groupe $(E, +)$
2. $\forall (\lambda, \vec{u}) \in G : \lambda \bullet \vec{u} \in G$

Proposition : G est un s.e.v. de E ssi :

1. il est non vide
2. $\forall (\lambda, \mu, \vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times G \times G : \lambda \bullet \vec{u} + \mu \bullet v \in G$

En fait, on peut même simplifier la deuxième condition en :

$$\forall (\lambda, \vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{K} \times G \times G : \lambda \bullet \vec{u} + \bullet v \in G$$

Proposition : G est un s.e.v. de E ssi :

1. il est non vide
2. il est stable par combinaison linéaire, autrement dit : pour tout famille $\mathcal{V} = (\vec{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs de G, et toute famille $\lambda = (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de scalaires, la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bullet \vec{v}_i$ est encore dans G.

2.2 Sous-espace engendré par une partie d'un $\mathbb{K}$-e.v.

Théorème — l'intersection d'une famille $(G_i)_{i\in I}$ de s.e.v. d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E est elle-même un sous-espace vectoriel de E.

Définition : soit A une partie non vide d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. On appelle sous-espace engendré par A et on note $\mathrm{Vect}(A)$ l'intersection de tous les s.e.v. de E contenant A. C'est aussi le plus petit (pour l'inclusion) s.e.v. de E contenant A.

Proposition : $\mathrm{Vect}(A)$ est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A.

2.3 Somme de sous-espaces

Définition : soient F et G deux s.e.v. d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E. On appelle *somme* de ces deux s.e.v. et on note $F+G$ l'ensemble $\{\vec{u}+\vec{v} : \vec{u} \in F \text{ et } \vec{v} \in G\}$. On définit de façon analogue la somme de n s.e.v. d'un même $\mathbb{K}$-e.v.

Proposition : $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$; $F + G$ est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartenant respectivement à F et G.

Définition : deux s.e.v. F et G d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E sont *disjoints* (au sens des s.e.v.) lorsque $F \cap G = \{\vec{0}\}$. On dit alors que la somme $F+G$ est *directe* et on la note $F \oplus G$. Si F, G, H sont trois s.e.v. d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E, on dit que H est somme directe de F et G lorsque $H = F \oplus G$. Lorsque $F \oplus G = E$, on dit que F et G sont *supplémentaires* dans E.

Proposition : un s.e.v. H d'un $\mathbb{K}$-e.v. E est somme directe de deux s.e.v. F et G de E ssi : $\forall \vec{u} \in H : \exists!\, \vec{v} \in F : \exists!\, \vec{w} \in G : \vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.

3 Génération d'un espace vectoriel

3.1 Familles génératrices

Définition : une famille finie $\mathcal{V} = (\vec{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. E est *génératrice* si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille $\mathcal{V}$; soit : $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{V})$ en confondant la famille et son support.

Définition : un $\mathbb{K}$-e.v. E est de *dimension finie* sur $\mathbb{K}$ s'il en existe au moins une famille génératrice finie. Dans le cas contraire E est de *dimension infinie*.

Exemple — $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 1. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension 2. $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n. $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie ssi E est fini.

3.2 Lemme fondamental

Lemme : $p + 1$ combinaisons linéaires de p vecteurs sont liées.

Preuve : raisonner par récurrence sur p. Le résultat est clair pour $p = 1$. Supposons le résultat acquis au rang p, et considérons une famille $(w_i)_{1\leqslant i\leqslant p+2}$ de combinaisons linéaires de $p+1$ vecteurs $(v_j)_{1\leqslant j\leqslant p+1}$. On peut supposer que w_{p+2} n'est pas nul ; notant $w_i = \sum_{1\leqslant j\leqslant p+1} \lambda_{i,j} v_i$, on peut même supposer $\lambda_{p+2,p+1}$ non nul, ce qui permet d'écrire, avec $\alpha = \lambda_{p+2,p+1}$:

$$u_{p+1} = \frac{1}{\alpha} w_{p+2} - \sum_{1\leqslant j\leqslant p} \frac{\lambda_{p+2,j}}{\alpha} u_j$$

Reportons ceci dans l'expression de w_i, pour $i \in [\![1, p+1]\!]$, il vient :

$$v_i + \frac{\lambda_{i,p+1}\lambda_{p+2,j}}{\alpha} v_{p+2} = \sum_{1\leqslant j\leqslant p} \Big(\lambda_{i,j} - \frac{\lambda_{i,p+1}\lambda_{p+2,j}}{\alpha}\Big) u_j$$

Notant alorw w_i le membre de gauche, on constante que la famille $(w_i)_{1\leqslant j\leqslant p+1}$ est formée de combinaisons linéaires de la famille $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$, donc est liée d'après l'hypothèse de récurrence. Soient $(\mu_i)_{1\leqslant i\leqslant p+1}$ des coefficients (non tous nuls) tels que $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant p+1} \mu_i w_i = \vec{0}$: en reportant, il vient

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant p+1} \mu_i v_i + \sum_{1\leqslant i\leqslant p+1} \frac{\lambda_{i,p+1}\lambda_{p+2,j}\mu_i}{\alpha} v_{p+2} = \vec{0}$$

ce qui montre que la famille $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant p+2}$ est liée.

3.3 Bases et dimension d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie

Définition : une famille $\mathcal{V}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. E est une *base* si elle est à la fois libre et génératrice.

Proposition : toute famille libre maximale (au sens de l'inclusion) est génératrice.

Proposition : toute famille génératrice minimale (au sens de l'inclusion) est libre.

Proposition : si E est de dimension finie, il possède des bases, et toutes ses bases ont le même cardinal.

Proposition : si E n'est pas de dimension finie, il existe dans E des familles libres mais non génératrices de cardinal arbitraire.

Définition : lorsque E est de dimension finie, on appelle *dimension* de E et on note $\dim(E)$ le cardinal commun à ses base. Si F est un s.e.v. de E, on appelle dimension de F et on note $\dim(F)$ la dimension de F considéré comme $\mathbb{K}$-e.v.

Théorème — (base incomplète) si $\mathcal{V} = (\vec{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ est une famille libre de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. E de dimension n, on peut trouver des vecteurs $(\vec{v}_i)_{p+1\leqslant i\leqslant n}$ tels que la famille $(\vec{v}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ soit une base de E.

Proposition : tout s.e.v. F d'un $\mathbb{K}$-e.v. E possède au moins un supplémentaire (plusieurs, en général).

Définition : soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $\mathcal{B} = (\vec{b}_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, il existe une et une seule famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires nuls sauf éventuellement un nombre fini d'entre eux, tels que $\vec{u} = \sum\limits_{i\in I} \lambda_i \vec{b}_i$. Les (λ_i) sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple — $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, la *base canonique* de $\mathbb{K}^n$ est la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ où $e_i = (\delta_{ij})_{1\leqslant j\leqslant n}$, δ_{ij} désignant le symbole de Kronecker.

3.4 Rang d'une famille de vecteurs

Définition : on appelle *rang d'une famille* $\mathcal{V} = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs la dimension du sous-espace $\mathrm{Vect}(\mathcal{V})$ engendré par $\mathcal{V}$.

Remarque — le rang d'une famille $\mathcal{V}$ est au plus égal au nombre d'éléments de $\mathcal{V}$.

Proposition : soient G et H deux supplémentaires d'un s.e.v. F d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. G et H sont simultanément de dimension finie ou de dimension infinie, et, dans le premier cas, ils ont même dimension.

Définition : soit F un s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. E de dimension quelconque ; si F possède dans E un supplémentaire de dimension finie, on appelle *codimension* de F dans E, et on note $\mathrm{codim}(F)$, la dimension commune à tous ses supplémentaires.

Proposition : soient F et G deux s.e.v. d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E de dimension finie ; alors :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim\big(F\cap G\big)$$

En particulier, si F et G sont en somme directe, $\dim(F\oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Proposition : soient F et G deux s.e.v. d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E de dimension finie. On suppose $F \subset G$, et $\dim(F) = \dim(G)$. Alors $F = G$.

4 Morphismes d'espaces vectoriels

4.1 Définitions

Définition : soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. Une fonction $f : E \mapsto F$ est *application linéaire* si elle vérifie :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} : \forall \mu \in \mathbb{K} : \forall \vec{u} \in E : \forall \vec{v} \in E : f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

On dit aussi que f est un homomorphisme du $\mathbb{K}$-e.v. E sur le $\mathbb{K}$-e.v. F. f est un *isomorphisme* si elle est bijective ; c'est un *endomorphisme* de E si $F = E$, un *automorphisme* de E si de plus elle est bijective.

Nous noterons $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des homomorphismes de E dans F, et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. On appelle *noyau* de f, et on note $\ker(f)$ l'ensemble $f^{-1}(\vec{0})$. On appelle *image* de f, et on note $\mathrm{im}(f)$ l'ensemble $f(E)$.

Proposition : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $f\big(\vec{0}\big) = \vec{0}$.

Proposition : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $f\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \bullet \vec{v}_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \bullet f(\vec{v}_i)$.

Proposition : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors :

1. pour tout s.e.v. G de E, $f(G)$ est un s.e.v. de F ;
2. en particulier $\mathrm{im}(f) = f(E)$ est un s.e.v. de F ;
3. pour tout s.e.v. H de F, $f^{-1}(H)$ est un s.e.v. de E ;
4. en particulier, $\ker(f) = f^{-1}\big(\vec{0}\big)$ est un s.e.v. de E.

Proposition : l'image d'une famille liée par une application linéaire est elle-même liée ; si l'image d'une famille par une application linéaire est libre, cette famille est libre.

Proposition : si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors f est injective ssi $\ker(f) = \{\vec{0}\}$.

4.2 Structures respectives de $\mathcal{L}(E, F)$ et de $\mathcal{L}(E)$

On définit sur $\mathcal{L}(E, F)$ une loi notée $+$ par : $\forall \vec{u} \in E : (f + g)(\vec{u}) = f(\vec{u}) + f(\vec{u})$, et une fonction de $\mathbb{K} \times \mathcal{L}(E, F)$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ notée $\bullet$ par : $\forall \vec{u} \in E : (\lambda \bullet f)(\vec{u}) = \lambda \bullet f(\vec{u})$.

Proposition : $\big(\mathcal{L}(E, F), +, \bullet\big)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.

Sur $\mathcal{L}(E)$, on peut en plus considérer la composition des applications linéaires, notée $\circ$.

La partie de $\mathcal{L}(E)$ constituée des éléments inversibles pour la loi $\circ$ (autrement dit : les automorphismes de E) est un groupe noté $GL(E)$ et appelé *groupe linéaire* de E, ou *groupe des automorphismes* de E.

4.3 Sous-espaces stables, morphisme induit

Définition : soient u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E et F un s.e.v. de E ; on dira que F est *stable* par u lorsque $u(F) \subset F$. La fonction $\hat{u} : x \in F \mapsto u(x)$ est alors un endomorphisme de F, dit *induit* par u.

4.4 Projections, projecteurs et symétries

Définition : soient F et G deux s.e.v. supplémentaires d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E. La *projection* de base F et de direction G est la fonction p qui, à $\vec{u} \in E$, associe l'unique élément $\vec{v} \in F$ tel que $\vec{u} - \vec{v} \in G$.

Proposition : notant q la projection de base G et de direction F, on a :

- $p \in \mathcal{L}(E)$ et $q \in \mathcal{L}(E)$
- $F = \mathrm{im}(p) = \ker(q)$, $G = \ker(p) = \mathrm{im}(q)$
- $p + q = Id_E$
- $p \circ p = p$, $q \circ q = q$, $p \circ q = q \circ p = 0$

Définition : $p \in \mathcal{L}(E)$ est un *projecteur* si $p \circ p = p$.

Proposition : si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, alors :

1. $E = \ker(p) \oplus \mathrm{im}(p)$
2. p est la projection de base $\mathrm{im}(p)$ et de direction $\ker(p)$

Définition : soient F et G deux s.e.v. supplémentaires d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E. La symétrie de base F et de direction G est la fonction $s = 2p - Id_E$ où p désigne la projection de base F et de direction G.

Proposition : la symétrie de base F et de direction G est un automorphisme involutif de E, autrement dit : $s \circ s = Id_E$.

Proposition : si s est un automorphisme involutif de E, alors, notant $F = \ker(f - Id_E)$ et $G = \ker(f + Id_E)$, s est la symétrie de base F et de direction G.

4.5 Théorème du rang

Théorème — soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v., $(v_i)_{i\in I}$ une base de E, et $(w_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F. Il existe une et une seule application linéaire f de E dans F qui vérifie $f(v_i) = w_i$ pour tout $i \in I$.

Théorème — soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v., G et H deux s.e.v. de E supplémentaires l'un de l'autre, $f \in \mathcal{L}(G, F)$ et $g \in \mathcal{L}(H, F)$. Il existe un et un seul $h \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que f et g soient les restrictions de h à G et H respectivement.

Définition : on appelle *rang d'une application linéaire* $f : E \mapsto F$ la dimension de $\text{im}(f)$; c'est aussi le rang de la famille $f(\mathcal{V})$, pour toute famille $\mathcal{V}$ génératrice de E.

Proposition : soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$; si E est de dimension finie, tout supplémentaire de $\ker(f)$ est isomorphe à $\text{im}(f)$.

Théorème — (du rang) soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\dim(E) = \dim\big(\ker(f)\big) + \text{rg}(f)$$

Preuve : utiliser un supplémentaire F de $\ker(f)$ dans E.

Proposition : deux $\mathbb{K}$-e.v. E et F de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension.

Proposition : soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de même dimension n et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est bijective
2. f est injective
3. f est surjective
4. $\text{rg}(f) = n$
5. $\ker f = \{\vec{0}\}$
6. $\text{im}\, f = E$
7. f possède une inverse à gauche
8. f possède une inverse à droite

4.6 Formes linéaires

Définition : une *forme linéaire* sur un $\mathbb{K}$-e.v. E est un homomorphisme de E dans $\mathbb{K}$.

Exemples — soit E le $\mathbb{R}$-e.v. des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même, fixons $x_0 \in \mathbb{R}$. La fonction $f \in E \mapsto f(x_0)$ est une forme linéaire. Sur $\mathcal{C}\big([a, b], \mathbb{R}\big)$ muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-e.v., la fonction $f \mapsto \int_a^b f(t)\, dt$ est une forme linéaire.

Définition : un *hyperplan* d'un $\mathbb{K}$-e.v. E est le noyau d'une forme linéaire sur E non nulle. C'est donc un s.e.v. de E distinct de E.

Proposition : dans un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, la dimension d'un hyperplan est égale à $n - 1$.

FIN