Équivalents

Table des matières

---

1 Définitions

Définition : soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels, à termes non nuls APCR. Nous dirons que ces suites sont *équivalentes*, et nous noterons $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, si la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers 1. La relation «être équivalente à» est réflexive, symétrique et transitive.

Définition : soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels, à termes non nuls APCR. Nous dirons que la suite (u_n) est *négligeable* devant la suite (v_n), et nous noterons $u_n = o(v_n)$, si la suite de terme général $\dfrac{u_n}{v_n}$ converge vers 0.

Remarque : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + o(u_n) \iff u_n = v_n + o(v_n)$.

2 Règles de calculs avec les équivalents

Proposition : soient (u_n), (v_n), (x_n) et (y_n) quatre suites de réels, à termes non nuls APCR. Si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} y_n$, alors :

- $(u_n)^2 \underset{n\to\infty}{\sim} (v_n)^2$; plus généralement, pour tout réel α **fixé** : $(u_n)^\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} (v_n)^\alpha$; en particulier, $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$; et $\sqrt{u_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{v_n}$, sous réserve que les deux suites soient à termes strictement positifs APCR ;
- $u_n x_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n x_n$; $\dfrac{u_n}{x_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{y_n}$ et $\dfrac{u_n}{x_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{y_n}$;

ATTENTION : additionner ou soustraire des équivalents est dangereux !

3 Équivalents usuels

Soit (u_n) une suite de réels qui converge vers 0. Les relations suivantes traduisent un simple fait : la fonction considérée est dérivable en 0, et sa dérivée en 0 vaut 1.

$\sin(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$; $\mathrm{sh}(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$; $\arg\mathrm{sh}(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$; $\tan(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$; $\mathrm{th}(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$; $\arctan(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$; $\arg\mathrm{th}(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$; $\ln(1+u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$; $\exp(u_n) - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$; $\sqrt{1+u_n} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{2}$ et plus généralement $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \alpha u_n$.

Ajoutons à cette liste $1 - \cos(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{(u_n)^2}{2}$ et $1 - \mathrm{ch}(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{(u_n)^2}{2}$.

FIN