Équations différentielles

Table des matières

---

1 Définitions

Soient $\mathcal{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$, d'amplitude non nulle et Φ une fonction de $\mathcal{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Nous dirons que $f \in \mathcal{D}(\mathcal{I}, \mathbb{R})$ est *solution* sur $\mathcal{I}$ de l'équation différentielle $\Phi(t, y, y') = 0$ si $\Phi\big(t, f(t), f'(t)\big) = 0$ quel que soit $t \in \mathcal{I}$.

Parfois, l'équation différentielle peut s'écrire $t' = \Phi(t, y)$: on dit alors qu'elle est *résolue* en y'.

Soit f une solution d'une telle équation ; la courbe représentative de f est une *courbe intégrale* de l'équation différentielle.

Dans certains cas, on peut spécifier une *condition initiale* : c'est un couple $(t_0, y_0) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}$; la solution *satisfait* cette condition initiale si $f(t_0) = y_0$.

2 L'équation différentielle $y' + ay = 0$

Soient a et b deux fonctions continues sur $\mathcal{I}$. Une solution sur $\mathcal{I}$ de cette équation est une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathcal{I}, \mathbb{R})$ vérifiant $f'(t) + a(t)f(t) = 0$ quel que soit $t \in \mathcal{I}$.

Cette équation différentielle est dite *linéaire* car elle vérifie la propriété suivante : si f et g sont deux solutions et λ un réel, alors $f + g$ et λf sont également des solutions. En particulier, la fonction nulle est une solution. On qualifie également cette équation d'*homogène*, à cause de la deuxième propriété.

Exemple — La fonction exponentielle est une des solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$. Elle est, parmi les solutions, la seule à satisfaire la condition initiale $(0, 1)$.

Proposition : Soit A une primitive sur $\mathcal{I}$ de a. La fonction $g : t \in \mathcal{I} \mapsto \exp\big(-A(t)\big)$ est une solution sur $\mathcal{I}$ de l'équation $y' + ay = 0$.

Preuve : Nous avons $g'(t) = -A'(t)g(t) = -a(t)g(t)$, donc $g'(t) + a(t)g(t) = 0$ et ce quel que soit $t \in \mathcal{I}$.

Proposition : les solution de notre équation sont toutes de la forme $t \in \mathcal{I} \mapsto \lambda \exp\big(-A(t)\big)$. Autrement dit : l'ensemble des solutions est $\{\lambda g \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, et donc cet ensemble est une *droite vectorielle*.

Signalons tout de suite une conséquence de cette proposition : une solution, autre que la fonction nulle, ne peut s'annuler en aucun point de $\mathcal{I}$: ceci parce qu'une telle solution est dérivable, et à plus forte raison continue.

Preuve : soit g la solution exhibée dans la précédente preuve. Nous avons $h'(t) + a(t)h(t) = 0$ quel que soit $t \in \mathcal{I}$. Multiplions les deux membres par $\exp\big(A(t)\big)$; il vient $\exp\big(A(t)\big)h'(t) + a(t)\exp\big(A(t)\big)h(t) = 0$, soit $\dfrac{d}{dt}\big(\exp\big(A(t)\big)h(t)\big) = 0$. Ceci montre que la fonction $t \in \mathcal{I} \mapsto \exp\big(A(t)\big)h(t)$ est constante. Notons λ sa valeur constante ; alors $h(t) = \lambda \exp\big(-A(t)\big) = \lambda g(t)$ et ce quel que soit $t \in \mathcal{I}$. Donc $h = \lambda f$.

Remarque : Expliciter une solution de l'équation se ramène donc à calculer une primitive de la fonction $t \in \mathcal{I} \mapsto \exp\big(-A(t)\big)$; ce qui n'est pas touours possible… On devra donc, dans bien des cas, se contenter d'écrire la solution avec une intégrale.

3 L'équation différentielle $y' + ay = b$

Cette équation est dite *complète* ou *avec second membre*. Nous la noterons (Eq), tandis que l'équation $y' + ay = 0$ sera notée (Eq_0). Une solution de (Eq) est une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathcal{I}, \mathbb{R})$ vérifiant $f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$ quel que soit $t \in \mathcal{I}$.

Commençons par quelques remarques :

- si f est une solution de (Eq) et h une solution de (Eq_0), alors $f+h$ est une solution de (Eq)
- f et g sont deux solutions de (Eq), alors $f-g$ est une solution de (Eq_0) et $(1-\lambda f+\lambda g$ (où λ est un réel) est une solution de (Eq)

Il suffit donc de résoudre (Eq_0) et de trouver une solution (dite *particulière*). Voici un exemple : l'équation $y'=y-t$ possède une solution (presque) évidente, à savoir $t\mapsto t+1$. La solution générale de $y'=y$ est $\lambda\exp$, donc la solution générale de notre équation est $t\mapsto t+1+\lambda e^t$.

S'il n'y a pas de solution particulière visible, on a recours à la méthode dite *de variation de la constante*. Ceclle-ci consiste à chercher une solution de la forme $h:t\mapsto\lambda(t)f(t)$, où f est une solution de (Eq_0). Voyons ceci :

$$h'(t)+a(t)h(t)=\lambda'(t)f(t)+\lambda(t)f'(t)+a(t)\lambda(t)f(t)=\lambda'(t)f(t)+\lambda(t)\big(\underbrace{f'(t)+a(t)f(t)}_{q(t)}\big)$$

La quantité $q(t)$ est nulle, puisque f est solution de (Eq_0). Nous sommes ramenés à la résolution de l'équation $\lambda'(t)f(t)=b(t)$, soit (à condition que f ne soit pas la solution nulle) $\lambda'(t)=\dfrac{b(t)}{f(t)}$; en clair, nous devons calculer une deuxième primitive.

Principe de superposition des solutions : considérons une famille de n équations différentielles $y'+ay=b_k$, où $k\in[\![1,n]\!]$. Soit $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille de réels. Notons f_k la solution générale de l'équation $y'+y=b_k$. Alors la fonction $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\lambda_k f_k$ est la solution générale de l'équation $y'+ay=\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}b-k$. Ce principe est utilisé, par exemple, dans l'étude des circuits électriques linéaires.

FIN