Exemples de résolutions d'équations différentielles

Table des matières

Fichier à utiliser : **equ_diffs**.

1 Définitions

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Les fonctions a (et, au bseoin, b) sont continues sur I, à valeurs réelles. Alors $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ une équation différentielle linéaire, *homogène*, du premier ordre ; et $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ est une équation *complète*. Notons A une primitive sur I de a ; les solutions de l'équation proposée sont les fonctions $t \in I \mapsto \lambda \exp\bigl(-A(t)\bigr)$.

2 Sans second membre

2.1 Exemple

Résolvons l'équation différentielle $\boxed{y'(t) + 2y(t) = 0}$: ici, $a(t) = 2$, donc $A(t) = \displaystyle\int^t 2u\,du = 2t$.

La solution générale de cette équation est donc $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-2t}$.

3 Avec second membre

3.1 Exemple

Résolvons l'équation différentielle $\boxed{y'(t) + 2y(t) = t^2 - 2t + 3}$.

Nous avons $a(t) = 2$, donc $A(t) = \int^t 2u\,du = 2t$.

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-2t}$.

Il nous reste à déterminer une solution particulière ; celle-ci est de la forme $h(t) = at^2 + bt + c$; donc $h'(t) = 2at + b$. Il vient :

$$h'(t) + 2h(t) = 2at + b + 2at^2 + 2bt + 2c = 2at^2 + 2(a+b)t + b + 2c$$

Ceci nous amène au système échelonné, formé des trois équations $2a = 1$, $2(a+b) = -2$ et $b + 2c = 3$.

La résolution nous donne $a = 1/2$, $b = -3/2$ et $c = 9/4$. La forme générale d'une solution est donc $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-2t} + \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{3t}{2} + \dfrac{9}{4}$.

3.2 Exemple

Résolvons l'équation différentielle $\boxed{y' + 2ty = 2t}$, avec la condition initiale $y(0) = 2$.

Nous avons $a(t) = 2t$, donc $A(t) = \int^t 2u\,du = t^2$. La solution générale de l'équation homogène $y' + 2ty = 0$ est donc la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-t^2}$.

Nous trouvons facilement une solution particulière de l'équation complète : il suffit de prendre $t \in \mathbb{R} \mapsto 1$.

La solution de l'équation complète est donc $t \in \mathbb{R} \mapsto 1 + \lambda e^{-t^2}$.

3.3 Exemple

Résolvons l'équation différentielle $\boxed{y'(t) + y(t) = \dfrac{1}{1 + e^t}}$.

Ici, nous avons $a(t) = 1$, donc $A(t) = \int^t 1\,dt = t$.

La solution générale de l'équation homogène est visiblement la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-t}$.

Il nous faut maintenant déterminer une solution particulière de l'équation complète ; la méthode de variation de la constante nous donne $\lambda'(t) = \dfrac{e^t}{1 + e^t}$, donc $\lambda(t) = \ln(1 + e^t)$.

La solution complète est donc $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-t} + e^{-t} \ln(1 + e^t)$.

3.4 Exemple

Résolvons l'équation différentielle $\boxed{y'(t) - 2y(t) = (2t^2 - 1)e^{t^2}}$.

Ici, nous avons $a(t) = -2$, donc $A(t) = \int^t -2\,du = -2t$. Les solutions de l'équation homogène sont visiblement de la forme $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{2t}$.

Il reste à déterminer une solution particulière ; celle-ci sera de la forme $t \mapsto e^{t^2} P(t)$, avec P polynomiale, de degré 2. Notons $P(t) = at^2 + bt + c$ et $P'(t) = 2at + b$; alors :

$$\begin{aligned}
\big(P'(t) + 2(t-1)P(t)\big)e^{t^2} &= (2t^2 - 1)e^{t^2} \\
\iff P'(t) + 2(t-1)P(t) &= 2t^2 - 1 \\
\iff 2at + b + 2(t-1)(at^2 + bt + c) &= 2t^2 - 1 \\
\iff 2at^2 + 2(b-a)t + a - 2b &= 2t^2 - 1
\end{aligned}$$

Ceci nous mène à $a = 1$ et $b = 1$.
Finalement, la solution générale de cette équation est $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{2t} + (1+t)e^{t^2}$.

3.5 Exemple

Nous résolvons l'équation différentielle $\boxed{y'(t) + 2ty(t) = e^{t-t^2}}$.

La solution générale de l'équation homogène est $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-t^2}$.
La méthode de variation de la constante s'applique, ici : $y(t) = \lambda(t)e^{-t^2}$ donne $\lambda'(t) = e^t + k$, où $k \in \mathbb{R}$. La solution de l'équation complète est donc $t \mapsto \lambda e^{-t^2} + e^{t-t^2}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3.6 Exemple

Nous résolvons l'équation différentielle $\boxed{y'(t) - 2ty(t) = \mathrm{sh}(t) - 2t\,\mathrm{ch}(t)}$.

L'équation différentielle se réduit à $y'(t) - 2ty(t) = 0$. Nous avons $a(t) = -2t$, donc $A(t) = \displaystyle\int^t -2u\,du = -t^2$.

La solution générale de l'équation homogène est $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{t^2}$.
À FAIRE ! Il reste à déterminer une solution particulière de l'équation complète.

4 Sans second membre, avec condition initiale

4.1 Exemple

Résolvons l'équation différentielle $\boxed{y'(t) + 3y(t) = 0}$, avec la condition initiale $y(0) = 2$.

Nous avons $a(t) = 3$, donc $A(t) = \displaystyle\int^t 3\,dt = 3t$. La forme générale des solutions est donc $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-3t}$.

La condition initiale $y(0) = 2$ impose $y : t \in \mathbb{R} \mapsto 2e^{-3t}$.

4.2 Exemple

Résolvons l'équation différentielle $\boxed{(1+t^2)y'(t) - ty(t) = 0}$, avec la condition initiale $y(1) = \pi$.

L'équation est mise sous la forme plus agréable $y'(t) - \dfrac{t}{1+t^2}y(t) = 0$; ici, $a(t) = -\dfrac{t}{1+t^2}$, donc $A(t) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int^t \frac{2u}{1+u^2}\,du = -\frac{1}{2}\sqrt{1+t^2}$.

Les solutions sont donc de la forme $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda\sqrt{1+t^2}$.

5 Avec second membre et condition initiale

5.1 Exemple

Résolvons l'équation différentielle $\boxed{y'(t) + ty(t) = t^2 + 1}$, avec la condition initiale $y(0) = 3$.

Observons l'équation homogène $y'(t) + ty(t) = 0$: ici, $a(t) = t$, donc $A(t) = \displaystyle\int^t u\,du = \frac{t^2}{2}$. Les solutions sont les fonctions $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-t^2/2}$.

Si nous cherchons une solution particulière, nous obtenons facilement la solution $t \in \mathbb{R} \mapsto t$.
Sinon, la condition initiale $y(0) = 3$ impose comme solution la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \exp(-t^2/2)$.

5.2 Exemple

Résolvons l'équation différentielle $\boxed{y'(t) - 2ty(t) = \mathrm{sh}(t) - 2t\,\mathrm{ch}(t)}$, avec la condition initiale $y(0) = 1$.

La solution générale de l'équation homogène est $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{t^2}$.
Il reste à déterminer une solution particulière de I'équation complète ; elle sera de la forme $\alpha\,\mathrm{sh}(t) + \beta\,\mathrm{sh}(t)$.

6 Exemples de recollements

6.1 Exemple

Résolvons l'équation différentielle $\boxed{ty'(t) - 2y(t) = t^3}$.

Nous nous ramenons à la résolution des équations $y'(t) - \dfrac{2}{t}y(t) = t^2$, avec $t < 0$, puis avec $t > 0$.

La solution de l'équation homogène nous donne $a(t) = \dfrac{2}{t}$, donc $A(t) = \displaystyle\int^t \frac{2}{u}\,du = 2\ln(t)$. Nous distinguerons désormais deux cas de figure.
Si $y \in]-, +\infty[$, alors $y(t) = \lambda \exp\big(-A(t)\big) = \lambda \exp\big(2\ln(t)\big) = \lambda t^2$.
De la même façon, nous obtenons pour $t \in]0, +\infty[$ la solution $y(t) = \mu \exp\big(-A(t)\big) = \mu \exp\big(2\ln(t)\big) = \mu t^2$.
Nous constatons que $y(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$, puis que $y'(t) \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0$. Donc la restriction de y à $]0, +\infty[$ est prolongeable à droite de 0 ; nous obtenons $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. La fonction, ainsi prolongée, est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
Un argument analogue nous montre que la restriction de y à $]-\infty, 0[$ est prolongeable par continuité à gauche de 0. La fonction, ainsi prolongée, est dérivable à gauche de 0.
Finalement, y, ainsi prolongée, est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation proposée sont de la forme suivante : $t < 0 \mapsto \mu t^2$, $t > 0 \mapsto \lambda t^2$ et $0 \mapsto 0$. Il existe une «double» infinité de solutions obtenues par recollement.

6.2 Exemple

Résolvons l'équation différentielle $\boxed{ty'(t) - y(t) = t^2}$. Observons que l'équation n'est pas définie sur $\mathbb{R}$; en revanche, elle est définie sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.
Si $t < 0$, la solution générale est $y(t) = \lambda t$; de même, si $t > 0$, la solution générale est $y(t) = \mu t$.
Une solution particulière est obtenue facilement : c'est la solution $y(t) = t^2$.
Finalement, la solution générale de l'équation différentielle est définie comme suit : si $t < 0$, alors $y(t) = \lambda t + t^2$; si $t > 0$, alors $y(t) = \mu t + t^2$.
Voyons si les deux «morceaux» peuvent être raccordés. Les solutions que nous venons de définir sont continues, respectivement à gauche et à droite de 0 ; donc nous pouvons prolonger y par continuité, en posant $y(0) = 0$.
Il reste à obtenir la dérivabilité à gauche et à droite de 0 : or celle-ci est obtenue en imposant $\lambda = \mu$. Concluons : il existe des solutions sur $\mathbb{R}$, de la forme $y(t) = \lambda t + t^2$.

6.3 Exemple

Résolvons l'équation différentielle $\boxed{ty'(t) - 2y(t) = \sqrt{t}}$. Observons que l'équation est définie sur $]0, +\infty[$.

La condition $t > 0$ nous est imposée. L'équation homogène s'écrit $y' - \dfrac{2}{t}y = 0$; sa solution générale est $t > 0 \mapsto \lambda t^2$.
Pour obtenir une solution particulière, il est raisonnable, au vu de l'équation, de prendre $y(t) = \alpha\sqrt{t}$. Alors $ty'(t) = t\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}$ et $2y(t) = 2\alpha\sqrt{t}$; donc $\dfrac{\alpha}{2} - 2\alpha = 1$, soit $\alpha = -\dfrac{2}{3}$.

La solution générale est $t \mapsto \lambda t^2 - \dfrac{2}{3}\sqrt{t}$.

Observons que la solution proposée tend vers 0^+ avec t, donc y est prolongeable par continuité à droite de 0, en posant $y(0) = 0$. Mais $\dfrac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \lambda t - \dfrac{2}{3\sqrt{t}}$ tend vers $-\infty$ lorsque t tend vers 0^+. Donc il n'existe pas de solution sur $\mathbb{R}_+$.

6.4 Exemple

Résolvons l'équation différentielle $\boxed{y'(t)\sin(t) - y(t)\cos(t) = -1}$. Nous constatons que cette équation ne peut être résolue que sur chaque intervalle $\mathcal{I}_n =]n\pi, (n+1)\pi[$.

Limitons-nous au cas où l'intervalle est $\mathcal{I}_{2p} =]2p\pi, (2p+1)\pi[$. Ici, $A(t) = \cot(t) = \dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}$; donc $A(t) = \displaystyle\int^t \frac{\cos(u)}{\sin(u)}\,du = \ln\bigl(\sin(t)\bigr)$.

La solution générale de l'équation homogène est donc $t \in\mapsto \lambda \exp\bigl(\ln(\sin(t)\bigr) = \lambda \sin(t)$.

Observons que la fonction $y(t) \xrightarrow[t\to 2p\pi^+]{} 0$ et $y(t) \xrightarrow[t\to(2p+1)\pi^-]{} 0$; Il reste à trouver une solution particulière de l'équation complète. Si nous avons l'œil, la fonction $t \mapsto -1$ convient ! Sinon, nous savons qu'une solution sera de la forme $t \in \mathcal{I}_n \mapsto \alpha\sin(t) + \beta\cos(t)$; le reste est une question d'identification.

6.5 Exemple

Résolvons l'équation différentielle $\boxed{t^2 y' + y = 1}$. Nous nous ramenons à l'équation $y' + \dfrac{2}{t^2} y = 0$. Les solutions sont : si $t < 0$, alors $y(t) = \lambda e^{1/t}$; si $t > 0$, alors $y(t) = \mu e^{1/t}$.

Une solution particulière évidente est la fonction $y(t) = 1$.

La solution générale est donc : si $t < 0$, alors $y(t) = 1 + \lambda e^{1/t}$; si $t > 0$, alors $y(t) = 1 + \mu e^{1/t}$.

La continuité de y à gauche et à droite de 0 est claire, donc nous pouvons prolonger y en imposant $y(0) = 0$.

Montrons enfin que la dérivée peut à son tour être prolongée : si $t < 0$, alors $y(t) = \lambda e^{1/t}$, avec $\lambda \in R$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$; si $t > 0$, alors $y(t) = 1$.