

# Exemples de résolutions d'équations différentielles

## Table des matières

<b>1 Définitions</b>	<b>1</b>
<b>2 Sans second membre</b>	<b>1</b>
2.1 Exemple . . . . .	1
<b>3 Avec second membre</b>	<b>2</b>
3.1 Exemple . . . . .	2
3.2 Exemple . . . . .	2
3.3 Exemple . . . . .	2
3.4 Exemple . . . . .	2
3.5 Exemple . . . . .	3
3.6 Exemple . . . . .	3
<b>4 Sans second membre, avec condition initiale</b>	<b>3</b>
4.1 Exemple . . . . .	3
4.2 Exemple . . . . .	3
<b>5 Avec second membre et condition initiale</b>	<b>3</b>
5.1 Exemple . . . . .	3
5.2 Exemple . . . . .	4
<b>6 Exemples de recollements</b>	<b>4</b>
6.1 Exemple . . . . .	4
6.2 Exemple . . . . .	4
6.3 Exemple . . . . .	4
6.4 Exemple . . . . .	5
6.5 Exemple . . . . .	5

---

Fichier à utiliser : `equ_diffs`.

## 1 Définitions

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point. Les fonctions  $a$  (et, au besoin,  $b$ ) sont continues sur  $I$ , à valeurs réelles. Alors  $y'(t) + a(t)y(t) = 0$  une équation différentielle linéaire, *homogène*, du premier ordre ; et  $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$  est une équation *complète*. Notons  $A$  une primitive sur  $I$  de  $a$  ; les solutions de l'équation proposée sont les fonctions  $t \in I \mapsto \lambda \exp(-A(t))$ .

## 2 Sans second membre

### 2.1 Exemple

Résolvons l'équation différentielle  $y'(t) + 2y(t) = 0$  : ici,  $a(t) = 2$ , donc  $A(t) = \int^t 2u \, du = 2t$ .

La solution générale de cette équation est donc  $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-2t}$ .

### 3 Avec second membre

#### 3.1 Exemple

Réolvons l'équation différentielle  $y'(t) + 2y(t) = t^2 - 2t + 3$ .

Nous avons  $a(t) = 2$ , donc  $A(t) = \int^t 2u \, du = 2t$ .

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions  $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-2t}$ .

Il nous reste à déterminer une solution particulière; celle-ci est de la forme  $h(t) = at^2 + bt + c$ ; donc  $h'(t) = 2at + b$ . Il vient :

$$h'(t) + 2h(t) = 2at + b + 2at^2 + 2bt + 2c = 2at^2 + 2(a+b)t + b + 2c$$

Ceci nous amène au système échelonné, formé des trois équations  $2a = 1$ ,  $2(a+b) = -2$  et  $b + 2c = 3$ .

La résolution nous donne  $a = 1/2$ ,  $b = -3/2$  et  $c = 9/4$ . La forme générale d'une solution est donc  $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-2t} + \frac{t^2}{2} - \frac{3t}{2} + \frac{9}{4}$ .

#### 3.2 Exemple

Réolvons l'équation différentielle  $y' + 2ty = 2t$ , avec la condition initiale  $y(0) = 2$ .

Nous avons  $a(t) = 2t$ , donc  $A(t) = \int^t 2u \, du = t^2$ . La solution générale de l'équation homogène  $y' + 2ty = 0$  est donc la fonction  $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-t^2}$ .

Nous trouvons facilement une solution particulière de l'équation complète: il suffit de prendre  $t \in \mathbb{R} \mapsto 1$ .

La solution de l'équation complète est donc  $t \in \mathbb{R} \mapsto 1 + \lambda e^{-t^2}$ .

#### 3.3 Exemple

Réolvons l'équation différentielle  $y'(t) + y(t) = \frac{1}{1+e^t}$ .

Ici, nous avons  $a(t) = 1$ , donc  $A(t) = \int^t 1 \, dt = t$ .

La solution générale de l'équation homogène est visiblement la fonction  $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-t}$ .

Il nous faut maintenant déterminer une solution particulière de l'équation complète; la méthode de variation de la constante nous donne  $\lambda'(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$ , donc  $\lambda(t) = \ln(1+e^t)$ .

La solution complète est donc  $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-t} + e^{-t} \ln(1+e^t)$ .

#### 3.4 Exemple

Réolvons l'équation différentielle  $y'(t) - 2y(t) = (2t^2 - 1)e^{t^2}$ .

Ici, nous avons  $a(t) = -2$ , donc  $A(t) = \int^t -2 \, du = -2t$ . Les solutions de l'équation homogène sont visiblement de la forme  $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{2t}$ .

Il reste à déterminer une solution particulière; celle-ci sera de la forme  $t \mapsto e^{t^2} P(t)$ , avec  $P$  polynomiale, de degré 2. Notons  $P(t) = at^2 + bt + c$  et  $P'(t) = 2at + b$ ; alors :

$$\begin{aligned} (P'(t) + 2(t-1)P(t))e^{t^2} &= (2t^2 - 1)e^{t^2} \\ \iff P'(t) + 2(t-1)P(t) &= 2t^2 - 1 \\ \iff 2at + b + 2(t-1)(at^2 + bt + c) &= 2t^2 - 1 \\ \iff 2at^2 + 2(b-a)t + a - 2b &= 2t^2 - 1 \end{aligned}$$

Ceci nous mène à  $a = 1$  et  $b = 1$ .

Finalement, la solution générale de cette équation est  $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{2t} + (1+t)e^{t^2}$ .

### 3.5 Exemple

Nous résolvons l'équation différentielle  $y'(t) + 2ty(t) = e^{t-t^2}$ .

La solution générale de l'équation homogène est  $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-t^2}$ .

La méthode de variation de la constante s'applique, ici:  $y(t) = \lambda(t)e^{-t^2}$  donne  $\lambda'(t) = e^t + k$ , où  $k \in \mathbb{R}$ . La solution de l'équation complète est donc  $t \mapsto \lambda e^{-t^2} + e^{t-t^2}$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### 3.6 Exemple

Nous résolvons l'équation différentielle  $y'(t) - 2ty(t) = \text{sh}(t) - 2t \text{ch}(t)$ .

L'équation différentielle se réduit à  $y'(t) - 2ty(t) = 0$ . Nous avons  $a(t) = -2t$ , donc  $A(t) = \int^t -2u \, du = -t^2$ .

La solution générale de l'équation homogène est  $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{t^2}$ .

**À FAIRE!** Il reste à déterminer une solution particulière de l'équation complète.

## 4 Sans second membre, avec condition initiale

### 4.1 Exemple

Résolvons l'équation différentielle  $y'(t) + 3y(t) = 0$ , avec la condition initiale  $y(0) = 2$ .

Nous avons  $a(t) = 3$ , donc  $A(t) = \int^t 3 \, dt = 3t$ . La forme générale des solutions est donc  $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-3t}$ .

La condition initiale  $y(0) = 2$  impose  $y : t \in \mathbb{R} \mapsto 2e^{-3t}$ .

### 4.2 Exemple

Résolvons l'équation différentielle  $(1+t^2)y'(t) - ty(t) = 0$ , avec la condition initiale  $y(1) = \pi$ .

L'équation est mise sous la forme plus agréable  $y'(t) - \frac{t}{1+t^2}y(t) = 0$ ; ici,  $a(t) = -\frac{t}{1+t^2}$ , donc  $A(t) = -\frac{1}{2} \int^t \frac{2u}{1+u^2} \, du = -\frac{1}{2} \sqrt{1+t^2}$ .

Les solutions sont donc de la forme  $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \sqrt{1+t^2}$ .

## 5 Avec second membre et condition initiale

### 5.1 Exemple

Résolvons l'équation différentielle  $y'(t) + ty(t) = t^2 + 1$ , avec la condition initiale  $y(0) = 3$ .

Observons l'équation homogène  $y'(t) + ty(t) = 0$ : ici,  $a(t) = t$ , donc  $A(t) = \int^t u \, du = \frac{t^2}{2}$ . Les solutions sont les fonctions  $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-t^2/2}$ .

Si nous cherchons une solution particulière, nous obtenons facilement la solution  $t \in \mathbb{R} \mapsto t$ .

Sinon, la condition initiale  $y(0) = 3$  impose comme solution la fonction  $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \exp(-t^2/2)$ .

## 5.2 Exemple

Réolvons l'équation différentielle  $y'(t) - 2ty(t) = \text{sh}(t) - 2t \text{ch}(t)$ , avec la condition initiale  $y(0) = 1$ .

La solution générale de l'équation homogène est  $t \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{t^2}$ .

Il reste à déterminer une solution particulière de l'équation complète; elle sera de la forme  $\alpha \text{sh}(t) + \beta \text{ch}(t)$ .

## 6 Exemples de recollements

### 6.1 Exemple

Réolvons l'équation différentielle  $ty'(t) - 2y(t) = t^3$ .

Nous nous ramenons à la résolution des équations  $y'(t) - \frac{2}{t}y(t) = t^2$ , avec  $t < 0$ , puis avec  $t > 0$ .

La solution de l'équation homogène nous donne  $a(t) = \frac{2}{t}$ , donc  $A(t) = \int^t \frac{2}{u} du = 2 \ln(t)$ . Nous distinguerons désormais deux cas de figure.

Si  $y \in ]-, +\infty[$ , alors  $y(t) = \lambda \exp(-A(t)) = \lambda \exp(2 \ln(t)) = \lambda t^2$ .

De la même façon, nous obtenons pour  $t \in ]0, +\infty[$  la solution  $y(t) = \mu \exp(-A(t)) = \mu \exp(2 \ln(t)) = \mu t^2$ .

Nous constatons que  $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} 0$ , puis que  $y'(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} 0$ . Donc la restriction de  $y$  à  $]0, +\infty[$  est prolongeable à droite de 0; nous obtenons  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 0$ . La fonction, ainsi prolongée, est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ .

Un argument analogue nous montre que la restriction de  $y$  à  $] -\infty, 0[$  est prolongeable par continuité à gauche de 0. La fonction, ainsi prolongée, est dérivable à gauche de 0.

Finalement,  $y$ , ainsi prolongée, est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Les solutions de l'équation proposée sont de la forme suivante:  $t < 0 \mapsto \mu t^2$ ,  $t > 0 \mapsto \lambda t^2$  et  $0 \mapsto 0$ . Il existe une «double» infinité de solutions obtenues par recollement.

### 6.2 Exemple

Réolvons l'équation différentielle  $ty'(t) - y(t) = t^2$ . Observons que l'équation n'est pas définie sur  $\mathbb{R}$ ; en revanche, elle est définie sur  $\mathbb{R}_-$  et sur  $\mathbb{R}_+$ .

Si  $t < 0$ , la solution générale est  $y(t) = \lambda t$ ; de même, si  $t > 0$ , la solution générale est  $y(t) = \mu t$ .

Une solution particulière est obtenue facilement: c'est la solution  $y(t) = t^2$ .

Finalement, la solution générale de l'équation différentielle est définie comme suit: si  $t < 0$ , alors  $y(t) = \lambda t + t^2$ ; si  $t > 0$ , alors  $y(t) = \mu t + t^2$ .

Voyons si les deux «morceaux» peuvent être raccordés. Les solutions que nous venons de définir sont continues, respectivement à gauche et à droite de 0; donc nous pouvons prolonger  $y$  par continuité, en posant  $y(0) = 0$ .

Il reste à obtenir la dérivabilité à gauche et à droite de 0: or celle-ci est obtenue en imposant  $\lambda = \mu$ . Concluons: il existe des solutions sur  $\mathbb{R}$ , de la forme  $y(t) = \lambda t + t^2$ .

### 6.3 Exemple

Réolvons l'équation différentielle  $ty'(t) - 2y(t) = \sqrt{t}$ . Observons que l'équation est définie sur  $]0, +\infty[$ .

La condition  $t > 0$  nous est imposée. L'équation homogène s'écrit  $y' - \frac{2}{t}y = 0$ ; sa solution générale est  $t > 0 \mapsto \lambda t^2$ .

Pour obtenir une solution particulière, il est raisonnable, au vu de l'équation, de prendre  $y(t) = \alpha \sqrt{t}$ . Alors  $ty'(t) = t \frac{\alpha}{2\sqrt{t}}$  et  $2y(t) = 2\alpha \sqrt{t}$ ; donc  $\frac{\alpha}{2} - 2\alpha = 1$ , soit  $\alpha = -\frac{2}{3}$ .

La solution générale est  $t \mapsto \lambda t^2 - \frac{2}{3} \sqrt{t}$ .

Observons que la solution proposée tend vers  $0^+$  avec  $t$ , donc  $y$  est prolongeable par continuité à droite de 0, en posant  $y(0) = 0$ . Mais  $\frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \lambda t - \frac{2}{3\sqrt{t}}$  tend vers  $-\infty$  lorsque  $t$  tend vers  $0^+$ . Donc il n'existe pas de solution sur  $\mathbb{R}_+$ .

## 6.4 Exemple

Résolvons l'équation différentielle  $\boxed{y'(t) \sin(t) - y(t) \cos(t) = -1}$ . Nous constatons que cette équation ne peut être résolue que sur chaque intervalle  $\mathcal{I}_n = ]n\pi, (n+1)\pi[$ .

Limitons-nous au cas où l'intervalle est  $\mathcal{I}_{2p} = ]2p\pi, (2p+1)\pi[$ . Ici,  $A(t) = \cot(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ ; donc  $A(t) =$

$$\int^t \frac{\cos(u)}{\sin(u)} du = \ln(\sin(t)).$$

La solution générale de l'équation homogène est donc  $t \mapsto \lambda \exp(\ln(\sin(t))) = \lambda \sin(t)$ .

Observons que la fonction  $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow 2p\pi^+]{\quad} 0$  et  $y(t) \xrightarrow[t \rightarrow (2p+1)\pi^-]{\quad} 0$ ; Il reste à trouver une solution particulière de l'équation complète. Si nous avons l'œil, la fonction  $t \mapsto -1$  convient! Sinon, nous savons qu'une solution sera de la forme  $t \in \mathcal{I}_n \mapsto \alpha \sin(t) + \beta \cos(t)$ ; le reste est une question d'identification.

## 6.5 Exemple

Résolvons l'équation différentielle  $\boxed{t^2 y' + y = 1}$ . Nous nous ramenons à l'équation  $y' + \frac{2}{t^2} y = 0$ . Les solutions sont: si  $t < 0$ , alors  $y(t) = \lambda e^{1/t}$ ; si  $t > 0$ , alors  $y(t) = \mu e^{1/t}$ .

Une solution particulière évidente est la fonction  $y(t) = 1$ .

La solution générale est donc: si  $t < 0$ , alors  $y(t) = 1 + \lambda e^{1/t}$ ; si  $t > 0$ , alors  $y(t) = 1 + \mu e^{1/t}$ .

La continuité de  $y$  à gauche et à droite de 0 est claire, donc nous pouvons prolonger  $y$  en imposant  $y(0) = 0$ .

Montrons enfin que la dérivée peut à son tour être prolongée: si  $t < 0$ , alors  $y(t) = \lambda e^{1/t}$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$ ; si  $t > 0$ , alors  $y(t) = 1$ .