Ensembles, relations, fonctions

Table des matières

► Ce support de cours donne l'essentiel des définitions, notations et propriétés à connaître, concernant les ensembles, les relations et les fonctions. S'agissant de la première version de ce support, il est vraisemblable que quelques coquilles s'y trouvent encore.

► Dans ce support, nous faisons référence à plusieurs reprises à la notion de loi de composition, ou aux propriétés qu'une telle loi peut posséder. Les définitions correspondantes sont dans le support de cours intitulé **Lois de composition**, et disponible ici :
`http://bruno.maitresdumonde.com/pcsi2/maths/cours/Lois-de-composition.pdf`

1 Ensembles

1.1 Vocabulaire et notations

Les notions d'*ensemble* et d'*élément* ne sont pas définies ; elles sont considérées comme intuitives.

Un objet x peut appartenir à l'ensemble E, ce qui s'écrit $x \in E$ et se lit ≪x appartient à E≫, ou encore ≪x est un *élément* de E≫. Nous écrirons $x \notin E$ lorsque x n'appartient pas à E.

Définition : un ensemble A est une *partie* (on dit aussi *sous-ensemble*) de E si tous les éléments de A appartiennent à E ; ceci s'écrit $A \subset E$ et se lit ≪A est contenu dans E≫.

Il existe un ensemble ne contenant aucun élément, c'est l'*ensemble vide*, noté $\emptyset$.

1.2 Opérations ensemblistes

Définition : soient A et B deux parties d'un même ensemble E ; l'*union* (ou *réunion*) de A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, des objets qui appartiennent à A, ou à B, voire aux deux simultanément.

Définition : l'*intersection* de A et B est notée $A \cap B$; c'est l'ensemble des objets qui appartiennent simultanément à A et à B.

Définition : nous dirons que les ensembles A et B sont *disjoints* si leur intersection est vide ; autrement dit : s'ils n'ont aucun élément en commun.

Les opérations $\cup$ et $\cap$ possèdent de nombreuses propriétés simples ; plus précisément, si A, B et C sont trois ensembles, alors :

1. $A \cup B = B \cup A$;
2. $A \cap B = B \cap A$;
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
7. $A \cup \emptyset = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$;
8. si $A \subset B$, alors $A \cup B = B$ et $A \cap B = A$.

Remarque : dans ce qui suit, nous faisons appel à la notion de *famille*, qui est définie plus loin, à la section 3.6.

Plus généralement, nous pouvons définir la réunion et l'intersection d'une famille $(E_i)_{i \in I}$ d'ensembles, indexée par un ensemble I non vide :

- la réunion de cette famille est l'ensemble des objets qui appartienent à *au moins un* membre de la famille ; elle est notée $\bigcup_{i \in I} E_i$; cette réunion est vide ssi *tous* les membres de la famille sont vides.
- l'intersection de cette famille est l'ensemble des objets qui appartienent *tous* membre de la famille ; elle est notée $\bigcap_{i \in I} E_i$; cette intersection est non vide ssi *au moins un* des membres de la famille n'est pas vide.

En pratique, nous utiliserons surtout des familles finies ; une telle famille sera donc indexée par les éléments de l'intervalle discret $[\![1, n]\!]$.

Définition : soient A et B deux ensembles ; si A est contenu dans B, nous noterons $B - A$ (ou $B \backslash A$) l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A. Nous dirons ausi que $B - A$ est le *complémentaire* de A dans B.

1.3 Ensemble des parties d'un ensemble E

Définition : soit E un ensemble ; l'*ensemble des parties* de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Exemple — L'ensemble des parties de $E = \{a,b,c\}$ est $\big\{\emptyset,a,b,c,a,b,b,c,a,c,E\big\}$.

Proposition : si E est fini, de taille n, alors $\mathcal{P}(E)$ est fini, de taille 2^n.

1.4 Ensembles finis, ensembles infinis

Définition : un ensemble E est *fini* si l'on peut numéroter ses éléments de 1 à n ; nous dirons alors que n est la *taille* de cet ensemble (on dit aussi le *cardinal*) ; nous noterons $|E|$ la taille de E. L'ensemble vide est fini, sa taille est nulle.

Remarque : certains utilisent la notation $\mathrm{Card}(E)$; les anglo-saxons utilisent la notation $\#E$.

Proposition : si A et B sont deux ensembles finis, et si $A \subset B$, alors $|A| \leqslant |B|$ avec égalité ssi $A = B$.

Proposition : si A et B sont deux ensembles finis, alors $A \cup B$ est fini, et $|A \cup B| \leqslant |A| + |B|$, avec égalité ssi A et B sont disjoints.

Définition : un ensemble E est *infini* s'il n'est pas fini. Par exemple $\mathbb{N}$ est infini, de même que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

2 Relations

2.1 Définitions

Définition : un *couple* est composé de deux objets a et b, il est noté (a, b) ; notez bien que, si $a \neq b$, alors les couples (a, b) et (b, a) sont distincts. Les couples (a, b) et (c, d) sont égaux ssi $a = c$ et $b = d$.

Définition : le *produit cartésien* de deux ensembles E et F est l'ensemble des couples (a, b) où a décrit E et b décrit F. Il est noté $E \times F$. Le *carré cartésien* de E est noté $E \times E$, ou plus cimplement E^2.

Exemple — Un échiquier peut être vu comme le produit cartésien des ensembles $E = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ et $F = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

Plus généralement, nous définissons le produit cartésien d'une *famille* de n ensembles $(E_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$: c'es l'ensemble des n-uplets $(x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ vérifiant $x_k \in E_k$ quel que soit $k \in [\![1, n]\!]$. Nous noterons E^n le produit cartésien $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois } E}$.

Définition : une *relation* sur un ensemble E est une partie $\mathcal{R}$ de $E \times E$. Soient x et y deux éléments de E ; nous noterons $x\mathcal{R}y$ lorsque le couple (x, y) appartient à $E \times E$.

2.2 Propriétés des relations

Définition : une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite *réflexive* lorsqu'elle vérifie la propriété suivante : $x\mathcal{R}x$ pour tout $x \in E$.

Exemples — Les relations $=$ et $\neq$ sont réflexives.

Définition : une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite *symétrique* lorsqu'elle vérifie la propriété suivante : si $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$.

Exemples — Les relations $=$ et $\neq$ sont symétriques.

Définition : une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite *antisymétrique* lorsqu'elle vérifie la propriété suivante : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x = y$.

Exemples — Les relations $\leqslant$ et $\geqslant$ sont antisymétriques, sur $\mathbb{R}$. La relation «divise» est antisymétrique sur $\mathbb{N}$, mais pas sur $\mathbb{Z}$.

Définition : une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite *transitive* lorsqu'elle vérifie la propriété suivante : si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.

Exemples — Les relations $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$ sont transitives, sur $\mathbb{R}$.

2.3 Relations d'ordre

Définition : une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une *relation d'ordre* (ou, plus simplement, un *ordre*) si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition : deux éléments de E sont *comparables* pour la relation $\mathcal{R}$ si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$.

Définition : une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite *totale* si les éléments sont deux à deux comparables. Sinon, $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre $\mathcal{R}$ partiel.

Exemples — Les relations $\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$ sont des ordres totaux sur les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. La relation «divise» est un ordre partiel sur $\mathbb{N}$.

3 Fonctions

3.1 Définitions et notations

Définition : soient E et F deux ensembles non vides. Une relation g de E vers F est une *fonction* si elle vérifie la propriété suivante : pour tout $x \in E$, il existe au plus un $y \in F$ tel que le couple (x, y) appartienne à g. Nous dirons que y est l'*image* de x par g, et nous noterons ceci $y = g(x)$. Nous dirons également que x est *un antécédent* de y par g.

Définition : E est l'*ensemble de départ* de g, F est son *ensemble d'arrivée*.

Remarque : dans la pratique, une fonction g est souvent définie par une *expression* qui, pour $x \in E$, indique comment calculer la valeur de $g(x)$. Il se peut que, pour certaines valeurs de $x \in E$, cette expression n'ait aucun sens ; observons par exemple la fonction «logarithme népérien», usuellement notée ln : son ensemble de départ est $\mathbb{R}$; l'expression correspondante est $\ln(x)$, mais n'a de sens que si x est strictement positif. Ceci nous mène à la définition suivante.

Définition : l'ensemble de définition de g, noté $\mathcal{D}_g$, est l'ensemble des $x \in E$ qui possèdent une image par g. Si $\mathcal{D}_g = E$, nous dirons que g est définie sur E.

Remarque : dans toute la suite, nous supposons que chacune des fonctions considérées est définie sur son ensemble de départ. Nous noterons $g : E \mapsto F$ pour dire que g est définie sur E (tout entier) et à valeurs dans F.

Nous noterons $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des fonctions définies sur E et à valeurs dans F.

Définition : l'*image* par g d'une partie A de E est l'ensemble des $g(x)$, où x décrit A. Nous la noterons $g(A)$.

Définition : en particulier, l'image de g est l'ensemble des images par g des éléments de E ; nous la notons $g(E)$.

Définition : l'*image réciproque* par g d'une partie B de F est l'ensemble des $x \in E$ tels que $g(x) \in B$. Nous la noterons $g^{-1}(B)$.

Définition : la *fonction identité* de l'ensemble E est la fonction $x \in E \mapsto x$; nous la notons id_E.

3.2 Restrictions et prolongements

Définition : soient Eet F deux ensembles, A une partie de E et g une fonction définie sur E et à valeurs dans F. La *restriction* de g à A est la fonction $x \in A \mapsto g(x)$. Nous la notons $g|_A$.

Définition : soient g et h deux fonctions à valeurs dans F ; g est définie sur E et h sur une partie A de E. Nous dirons que g est *un prolongement* de h si h est *la* restriction de g à A.

3.3 Composition des fonctions

Définition : soient E, F, G trois ensembles ; p une fonction de E dans F et q une fonction de F dans G. La *composée* de q et p (dans cet ordre) est la fonction $x \in E \mapsto q\big(p(x)\big)$. Cette fonction sera notée $q \circ p$; nous définissons ainsi une opération appelée *composition des fonctions.*

Remarque : la fonction identité de E est le neutre de la loi $\circ$, pour la composition des fonctions de E dans E.

Proposition : la composition des fonctions est associative.

Preuve : soient E, F, G, H quatre ensembles ; p une fonction de E dans F, q une fonction de F dans G et r une fonction de G dans H. Alors $\big(r\circ(q\circ p)\big)(x) = r\big((q\circ p)(x)\big) = r\big(q(p(x))\big)$; d'autre part $(r\circ q)\big(p(x)\big) = r\big(q(p(x))\big)$. Et ceci vaut quel que soit $x \in E$.

3.4 Itérés d'une fonction

Définition : soient E un ensemble et g une fonction de E dans E. Nous pouvons donc composer g avec elle-même, autant de fois que l'on veut.

Nous définissons par récurrence le n-ième itéré de f, qui sera noté $g^{(n)}$: g^0 est l'identité de E ; et $g^{(n+1)} = g^n \circ g$.

Proposition : $g^{n+1} = g \circ g^n$, $g^p \circ g^q = g^{p+q}$, $\big(g^p\big)^q = g^{pq}$.

3.5 Injections, surjections, bijections

Définition : soient E, F deux ensembles et $g : E \mapsto F$. Nous dirons que g est *injective* (ou encore : g est une *injection*) lorsqu'elle vérifie la propriété suivante : si $g(a) = g(b)$, alors $a = b$. Ceci revient à dire que tout élément de F possède *au plus* un antécédent par g.

Définition : soient E, F deux ensembles et $g : E \mapsto F$. Nous dirons que g est *surjective* (ou encore : g est une *surjection*) lorsque $g(E) = F$. Ceci revient à dire que tout élément y de F possède *au moins* un antécédent par g.

Proposition : la composée de deux injections (resp. deux surjections) est une injection (resp. une surjection).

Définition : $g : E \mapsto F$ est *bijective* (ou encore : g est une *bijection*) si elle est à la fois injective et surjective. Ceci revient à dire que tout élément de F possède un et un seul antécédent par g.

Proposition : la composée de deux bijections est une bijection.

Proposition : soient E, F, G trois ensembles ; $g : E \mapsto F$ et $h : F \mapsto G$ deux bijections. Alors $g \circ f$ est une bijection.

Définition : soit $g : E \mapsto F$ bijective. La *bijection réciproque* de g est la fonction qui, à $y \in F$, associe l'unique antécédent de y par g. Nous la notons g^{-1}.

Remarque : $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.

Proposition : la bijection réciproque de $g \circ f$ est $f^{-1} \circ g^{-1}$.

3.6 Notion de famille

Nous avons déjà rencontré la notion de famille (sans la définir), dans la section 1.2.

Définition : soient E et I deux ensembles non vides. Une *famille* d'éléments de E, *indexée* par I, est une fonction φ de I dans E. Nous noterons $(\varphi_i)_{i \in I}$ une telle famille. I est le *support* de la famille. La famille est *finie* si son support l'est.

Exemples — Un triplet (a, b, c) est une famille indexée par $\{1,2,3\}$; une *suite* est une famille indexée par $\mathbb{N}$.

Remarque : nous retrouverons la notion de famille indexée par un ensemble fini, lors de l'étude des opérateurs $\sum$ et $\prod$.

FIN