

# Ensembles, relations, fonctions

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Ensembles</b>	<b>1</b>
1.1	Vocabulaire et notations . . . . .	1
1.2	Opérations ensemblistes . . . . .	1
1.3	Ensemble des parties d'un ensemble $E$ . . . . .	2
1.4	Ensembles finis, ensembles infinis . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Relations</b>	<b>3</b>
2.1	Définitions . . . . .	3
2.2	Propriétés des relations . . . . .	3
2.3	Relations d'ordre . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Fonctions</b>	<b>3</b>
3.1	Définitions et notations . . . . .	3
3.2	Restrictions et prolongements . . . . .	4
3.3	Composition des fonctions . . . . .	4
3.4	Itérés d'une fonction . . . . .	4
3.5	Injections, surjections, bijections . . . . .	4
3.6	Notion de famille . . . . .	5

---

► Ce support de cours donne l'essentiel des définitions, notations et propriétés à connaître, concernant les ensembles, les relations et les fonctions. S'agissant de la première version de ce support, il est vraisemblable que quelques coquilles s'y trouvent encore.

► Dans ce support, nous faisons référence à plusieurs reprises à la notion de loi de composition, ou aux propriétés qu'une telle loi peut posséder. Les définitions correspondantes sont dans le support de cours intitulé **Lois de composition**, et disponible ici :

<http://bruno.maitresdumonde.com/pcsi2/maths/cours/Lois-de-composition.pdf>

## 1 Ensembles

### 1.1 Vocabulaire et notations

Les notions d'*ensemble* et d'*élément* ne sont pas définies ; elles sont considérées comme intuitives.

Un objet  $x$  peut appartenir à l'ensemble  $E$ , ce qui s'écrit  $x \in E$  et se lit « $x$  appartient à  $E$ », ou encore « $x$  est un *élément* de  $E$ ». Nous écrirons  $x \notin E$  lorsque  $x$  n'appartient pas à  $E$ .

**Définition** : un ensemble  $A$  est une *partie* (on dit aussi *sous-ensemble*) de  $E$  si tous les éléments de  $A$  appartiennent à  $E$  ; ceci s'écrit  $A \subset E$  et se lit « $A$  est contenu dans  $E$ ».

Il existe un ensemble ne contenant aucun élément, c'est l'*ensemble vide*, noté  $\emptyset$ .

### 1.2 Opérations ensemblistes

**Définition** : soient  $A$  et  $B$  deux parties d'un même ensemble  $E$  ; l'*union* (ou *réunion*) de  $A$  et  $B$  est l'ensemble, noté  $A \cup B$ , des objets qui appartiennent à  $A$ , ou à  $B$ , voire aux deux simultanément.

**Définition** : l'*intersection* de  $A$  et  $B$  est notée  $A \cap B$  ; c'est l'ensemble des objets qui appartiennent simultanément à  $A$  et à  $B$ .

**Définition** : nous dirons que les ensembles  $A$  et  $B$  sont *disjoints* si leur intersection est vide ; autrement dit : s'ils n'ont aucun élément en commun.

Les opérations  $\cup$  et  $\cap$  possèdent de nombreuses propriétés simples ; plus précisément, si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois ensembles, alors :

1.  $A \cup B = B \cup A$ ;
2.  $A \cap B = B \cap A$ ;
3.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;
4.  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ;
5.  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ;
6.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;
7.  $A \cup \emptyset = A$  et  $A \cap \emptyset = \emptyset$ ;
8. si  $A \subset B$ , alors  $A \cup B = B$  et  $A \cap B = A$ .

**Remarque :** dans ce qui suit, nous faisons appel à la notion de *famille*, qui est définie plus loin, à la section 3.6.

Plus généralement, nous pouvons définir la réunion et l'intersection d'une famille  $(E_i)_{i \in I}$  d'ensembles, indexée par un ensemble  $I$  non vide :

- la réunion de cette famille est l'ensemble des objets qui appartiennent à *au moins un* membre de la famille ; elle est notée  $\bigcup_{i \in I} E_i$  ; cette réunion est vide ssi *tous* les membres de la famille sont vides.
- l'intersection de cette famille est l'ensemble des objets qui appartiennent *tous* membre de la famille ; elle est notée  $\bigcap_{i \in I} E_i$  ; cette intersection est non vide ssi *au moins un* des membres de la famille n'est pas vide.

En pratique, nous utiliserons surtout des familles finies ; une telle famille sera donc indexée par les éléments de l'intervalle discret  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Définition :** soient  $A$  et  $B$  deux ensembles ; si  $A$  est contenu dans  $B$ , nous noterons  $B - A$  (ou  $B \setminus A$ ) l'ensemble des éléments de  $B$  qui n'appartiennent pas à  $A$ . Nous dirons aussi que  $B - A$  est le *complémentaire* de  $A$  dans  $B$ .

### 1.3 Ensemble des parties d'un ensemble $E$

**Définition :** soit  $E$  un ensemble ; l'*ensemble des parties* de  $E$  est noté  $\mathcal{P}(E)$ .

**Exemple** — L'ensemble des parties de  $E = \{a, b, c\}$  est  $\{\emptyset, a, b, c, a, b, b, c, a, c, E\}$ .

**Proposition :** si  $E$  est fini, de taille  $n$ , alors  $\mathcal{P}(E)$  est fini, de taille  $2^n$ .

### 1.4 Ensembles finis, ensembles infinis

**Définition :** un ensemble  $E$  est *fini* si l'on peut numéroter ses éléments de 1 à  $n$  ; nous dirons alors que  $n$  est la *taille* de cet ensemble (on dit aussi le *cardinal*) ; nous noterons  $|E|$  la taille de  $E$ . L'ensemble vide est fini, sa taille est nulle.

**Remarque :** certains utilisent la notation  $\text{Card}(E)$  ; les anglo-saxons utilisent la notation  $\#E$ .

**Proposition :** si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles finis, et si  $A \subset B$ , alors  $|A| \leq |B|$  avec égalité ssi  $A = B$ .

**Proposition :** si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles finis, alors  $A \cup B$  est fini, et  $|A \cup B| \leq |A| + |B|$ , avec égalité ssi  $A$  et  $B$  sont disjoints.

**Définition :** un ensemble  $E$  est *infini* s'il n'est pas fini. Par exemple  $\mathbb{N}$  est infini, de même que  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R}$ .

## 2 Relations

### 2.1 Définitions

**Définition :** un *couple* est composé de deux objets  $a$  et  $b$ , il est noté  $(a, b)$  ; notez bien que, si  $a \neq b$ , alors les couples  $(a, b)$  et  $(b, a)$  sont distincts. Les couples  $(a, b)$  et  $(c, d)$  sont égaux ssi  $a = c$  et  $b = d$ .

**Définition :** le *produit cartésien* de deux ensembles  $E$  et  $F$  est l'ensemble des couples  $(a, b)$  où  $a$  décrit  $E$  et  $b$  décrit  $F$ . Il est noté  $E \times F$ . Le *carré cartésien* de  $E$  est noté  $E \times E$ , ou plus simplement  $E^2$ .

**Exemple** — Un échiquier peut être vu comme le produit cartésien des ensembles  $E = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$  et  $F = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ .

Plus généralement, nous définissons le produit cartésien d'une *famille* de  $n$  ensembles  $(E_k)_{1 \leq k \leq n}$  : c'est l'ensemble des  $n$ -uplets  $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$  vérifiant  $x_k \in E_k$  quel que soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Nous noterons  $E^n$  le produit cartésien  $\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois } E}$ .

**Définition** : une *relation* sur un ensemble  $E$  est une partie  $\mathcal{R}$  de  $E \times E$ . Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $E$  ; nous noterons  $x\mathcal{R}y$  lorsque le couple  $(x, y)$  appartient à  $E \times E$ .

## 2.2 Propriétés des relations

**Définition** : une relation  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $E$  est dite *réflexive* lorsqu'elle vérifie la propriété suivante :  $x\mathcal{R}x$  pour tout  $x \in E$ .

**Exemples** — Les relations  $=$  et  $\neq$  sont réflexives.

**Définition** : une relation  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $E$  est dite *symétrique* lorsqu'elle vérifie la propriété suivante : si  $x\mathcal{R}y$ , alors  $y\mathcal{R}x$ .

**Exemples** — Les relations  $=$  et  $\neq$  sont symétriques.

**Définition** : une relation  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $E$  est dite *antisymétrique* lorsqu'elle vérifie la propriété suivante : si  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x$ , alors  $x = y$ .

**Exemples** — Les relations  $\leq$  et  $\geq$  sont antisymétriques, sur  $\mathbb{R}$ . La relation «divise» est antisymétrique sur  $\mathbb{N}$ , mais pas sur  $\mathbb{Z}$ .

**Définition** : une relation  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $E$  est dite *transitive* lorsqu'elle vérifie la propriété suivante : si  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}z$ , alors  $x\mathcal{R}z$ .

**Exemples** — Les relations  $\leq, <, \geq, >$  sont transitives, sur  $\mathbb{R}$ .

## 2.3 Relations d'ordre

**Définition** : une relation  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $E$  est une *relation d'ordre* (ou, plus simplement, un *ordre*) si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

**Définition** : deux éléments de  $E$  sont *comparables* pour la relation  $\mathcal{R}$  si  $x\mathcal{R}y$  et  $y\mathcal{R}x$ .

**Définition** : une relation d'ordre  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $E$  est dite *totale* si les éléments sont deux à deux comparables. Sinon,  $\mathcal{R}$  est une relation d'ordre  $\mathcal{R}$  partiel.

**Exemples** — Les relations  $\leq, <, \geq, >$  sont des ordres totaux sur les ensembles  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ . La relation «divise» est un ordre partiel sur  $\mathbb{N}$ .

# 3 Fonctions

## 3.1 Définitions et notations

**Définition** : soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides. Une relation  $g$  de  $E$  vers  $F$  est une *fonction* si elle vérifie la propriété suivante : pour tout  $x \in E$ , il existe au plus un  $y \in F$  tel que le couple  $(x, y)$  appartienne à  $g$ . Nous dirons que  $y$  est l'*image* de  $x$  par  $g$ , et nous noterons ceci  $y = g(x)$ . Nous dirons également que  $x$  est un *antécédent* de  $y$  par  $g$ .

**Définition** :  $E$  est l'*ensemble de départ* de  $g$ ,  $F$  est son *ensemble d'arrivée*.

**Remarque** : dans la pratique, une fonction  $g$  est souvent définie par une *expression* qui, pour  $x \in E$ , indique comment calculer la valeur de  $g(x)$ . Il se peut que, pour certaines valeurs de  $x \in E$ , cette expression n'ait aucun sens ; observons par exemple la fonction «logarithme népérien», usuellement notée  $\ln$  : son ensemble de départ est  $\mathbb{R}$  ; l'expression correspondante est  $\ln(x)$ , mais n'a de sens que si  $x$  est strictement positif. Ceci nous mène à la définition suivante.

**Définition** : l'ensemble de définition de  $g$ , noté  $\mathcal{D}_g$ , est l'ensemble des  $x \in E$  qui possèdent une image par  $g$ . Si  $\mathcal{D}_g = E$ , nous dirons que  $g$  est définie sur  $E$ .

**Remarque** : dans toute la suite, nous supposons que chacune des fonctions considérées est définie sur son ensemble de départ. Nous noterons  $g : E \mapsto F$  pour dire que  $g$  est définie sur  $E$  (tout entier) et à valeurs dans  $F$ .

Nous noterons  $\mathcal{F}(E, F)$  l'ensemble des fonctions définies sur  $E$  et à valeurs dans  $F$ .

**Définition :** l'image par  $g$  d'une partie  $A$  de  $E$  est l'ensemble des  $g(x)$ , où  $x$  décrit  $A$ . Nous la noterons  $g(A)$ .

**Définition :** en particulier, l'image de  $g$  est l'ensemble des images par  $g$  des éléments de  $E$ ; nous la notons  $g(E)$ .

**Définition :** l'image réciproque par  $g$  d'une partie  $B$  de  $F$  est l'ensemble des  $x \in E$  tels que  $g(x) \in B$ . Nous la noterons  $g^{-1}(B)$ .

**Définition :** la fonction identité de l'ensemble  $E$  est la fonction  $x \in E \mapsto x$ ; nous la notons  $\text{id}_E$ .

### 3.2 Restrictions et prolongements

**Définition :** soient  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $A$  une partie de  $E$  et  $g$  une fonction définie sur  $E$  et à valeurs dans  $F$ . La restriction de  $g$  à  $A$  est la fonction  $x \in A \mapsto g(x)$ . Nous la notons  $g|_A$ .

**Définition :** soient  $g$  et  $h$  deux fonctions à valeurs dans  $F$ ;  $g$  est définie sur  $E$  et  $h$  sur une partie  $A$  de  $E$ . Nous dirons que  $g$  est un prolongement de  $h$  si  $h$  est la restriction de  $g$  à  $A$ .

### 3.3 Composition des fonctions

**Définition :** soient  $E, F, G$  trois ensembles;  $p$  une fonction de  $E$  dans  $F$  et  $q$  une fonction de  $F$  dans  $G$ . La composée de  $q$  et  $p$  (dans cet ordre) est la fonction  $x \in E \mapsto q(p(x))$ . Cette fonction sera notée  $q \circ p$ ; nous définissons ainsi une opération appelée composition des fonctions.

**Remarque :** la fonction identité de  $E$  est le neutre de la loi  $\circ$ , pour la composition des fonctions de  $E$  dans  $E$ .

**Proposition :** la composition des fonctions est associative.

**Preuve :** soient  $E, F, G, H$  quatre ensembles;  $p$  une fonction de  $E$  dans  $F$ ,  $q$  une fonction de  $F$  dans  $G$  et  $r$  une fonction de  $G$  dans  $H$ . Alors  $(r \circ (q \circ p))(x) = r((q \circ p)(x)) = r(q(p(x)))$ ; d'autre part  $(r \circ q)(p(x)) = r(q(p(x)))$ . Et ceci vaut quel que soit  $x \in E$ .

### 3.4 Itérés d'une fonction

**Définition :** soient  $E$  un ensemble et  $g$  une fonction de  $E$  dans  $E$ . Nous pouvons donc composer  $g$  avec elle-même, autant de fois que l'on veut.

Nous définissons par récurrence le  $n$ -ième itéré de  $f$ , qui sera noté  $g^{(n)}$ :  $g^0$  est l'identité de  $E$ ; et  $g^{(n+1)} = g^n \circ g$ .

**Proposition :**  $g^{n+1} = g \circ g^n$ ,  $g^p \circ g^q = g^{p+q}$ ,  $(g^p)^q = g^{pq}$ .

### 3.5 Injections, surjections, bijections

**Définition :** soient  $E, F$  deux ensembles et  $g : E \mapsto F$ . Nous dirons que  $g$  est injective (ou encore:  $g$  est une injection) lorsqu'elle vérifie la propriété suivante: si  $g(a) = g(b)$ , alors  $a = b$ . Ceci revient à dire que tout élément de  $F$  possède au plus un antécédent par  $g$ .

**Définition :** soient  $E, F$  deux ensembles et  $g : E \mapsto F$ . Nous dirons que  $g$  est surjective (ou encore:  $g$  est une surjection) lorsque  $g(E) = F$ . Ceci revient à dire que tout élément  $y$  de  $F$  possède au moins un antécédent par  $g$ .

**Proposition :** la composée de deux injections (resp. deux surjections) est une injection (resp. une surjection).

**Définition :**  $g : E \mapsto F$  est bijective (ou encore:  $g$  est une bijection) si elle est à la fois injective et surjective. Ceci revient à dire que tout élément de  $F$  possède un et un seul antécédent par  $g$ .

**Proposition :** la composée de deux bijections est une bijection.

**Proposition :** soient  $E, F, G$  trois ensembles;  $g : E \mapsto F$  et  $h : F \mapsto G$  deux bijections. Alors  $g \circ f$  est une bijection.

**Définition :** soit  $g : E \mapsto F$  bijective. La bijection réciproque de  $g$  est la fonction qui, à  $y \in F$ , associe l'unique antécédent de  $y$  par  $g$ . Nous la notons  $g^{-1}$ .

**Remarque :**  $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$  et  $f \circ f^{-1} = \text{id}_F$ .

**Proposition :** la bijection réciproque de  $g \circ f$  est  $f^{-1} \circ g^{-1}$ .

### 3.6 Notion de famille

Nous avons déjà rencontré la notion de famille (sans la définir), dans la section 1.2.

**Définition :** soient  $E$  et  $I$  deux ensembles non vides. Une *famille* d'éléments de  $E$ , *indexée* par  $I$ , est une fonction  $\varphi$  de  $I$  dans  $E$ . Nous noterons  $(\varphi_i)_{i \in I}$  une telle famille.  $I$  est le *support* de la famille. La famille est *finie* si son support l'est.

**Exemples** — Un triplet  $(a, b, c)$  est une famille indexée par  $\{1, 2, 3\}$ ; une *suite* est une famille indexée par  $\mathbb{N}$ .

**Remarque :** nous retrouverons la notion de famille indexée par un ensemble fini, lors de l'étude des opérateurs  $\Sigma$  et  $\Pi$ .

**FIN**