Espaces vectoriels normés

Table des matières

Les notions exposées ici vont servir :

1. pour l'étude des *courbes paramétrées* ;
2. pour l'étude des fonctions de plusieurs variables.

1 Normes

Définition : une *norme* sur un $\mathbb{R}$-e.v. E est une application $N : E \mapsto \mathbb{R}^+$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

1. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ quel que soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$;
2. $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ quels que soient les vecteurs x et y ;
3. si $N(x) = 0$, alors $x = \vec{0}$.

Remarque : $N(\vec{0}) = 0$; en effet, $N(\vec{0}) = N(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot \mathbb{N}(\vec{0}) = 0$.
Définition : un *espace vectoriel normé* (en abrégé : un e.v.n.) est un $\mathbb{R}$-e.v. muni d'une norme.
Exemple — soit E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie n et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E. Ddéfinissons trois normes N_1, N_2 et N_∞ comme suit : pour tout vecteur x de E, de composantes $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dans la base $\mathcal{B}$, $N_1(x) = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, $N_2(x) = \sqrt{\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} {x_i}^2}$ et $N_\infty(x) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$. Notons que N_2 est la norme euclidienne associée au produit scalaire Φ défini par $\Phi(x, y) = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i y_i$.

Exemple — nous pouvons munir $E = \mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ de deux normes simples : $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 \big|f(t)\big|\, dt$ et $N_\infty(f) = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \big|f(t)\big|$. N_∞ est la norme de la *convergence uniforme.*

2 Normes équivalentes

Définition : deux normes N et N' sur un même $\mathbb{R}$-e.v. E sont *équivalentes* s'il existe $A > 0$ et $B > 0$ tels que $AN(x) \leqslant N'(x) \leqslant BN(x)$ quels que soient les vecteurs x et y.
Proposition : la relation ainsi définie sur l'ensemble des normes d'un $\mathbb{R}$-e.v. E est réflexive, symétrique et transitive.
Proposition : les normes N_1, N_2 et N_∞ du premier exemple sont deux à deux équivalentes.
Preuve : $N_1(x) \leqslant nN_\infty(x)$; $N_\infty(x) \leqslant N_2(x)$; $N_2(x) \leqslant N_1(x)$ (comparer les carrés). D'où le résultat par transitivité.
Théorème — sur un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
Nous admettrons ce résultat. Notons au passage qu'il est faux en dimension infinie ; un exemple est donné à la fin de la section3.

3 Distance dans un e.v.n.

Définition : soit (E, N) un $\mathbb{R}$-e.v. normé ; nous définissons une *distance* d sur E en posant $d(x, y) = N(x - y)$. Voici les propriétés de d :

1. symétrie : $d(x, y) = d(y, x)$;
2. $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$;
3. inégalité triangulaire : $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Dans la suite, E est un espace vectoriel normé, dont la norme est notée N, et la distance associée d.

Définition : soient $a \in E$ et $r > 0$. La *boule ouverte* de centre a et de rayon r est $\{x \in E \mid N(x - a) < r\}$; elle est notée $\mathcal{B}(a, r)$. La *boule fermée* de centre a et de rayon r est $\{x \in E \mid N(x - a) \leqslant r\}$; elle est notée $\overline{\mathcal{B}}(a, r)$.

Définition : soit $a \in E$. Une partie $\mathcal{V}$ de E est un *voisinage* de a si elle contient une boule de centre a et de rayon $r > 0$.

Définition : une partie U de E est un *ouvert* si elle est voisinage de chacun de ses points.

Définition : une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge vers a si la suite de terme général $d(x_n, a)$ converge vers 0.

Définition : soit f une fonction définie sur un voisinage de a. Nous dirons que f est continue en a si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers a, la suite de terme général $f(x_n)$ converge vers $f(a)$.

Proposition : deux normes équivalentes sur un $\mathbb{R}$-e.v. E définissent la même topologie de E ; en particulier, toute suite qui converge au sens de l'une, converge au sens de l'autre, et vers la même limite.

Remarque : comme il a été annoncé plus haut, voici un exemple montrant que, dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, deux normes ne sont pas nécessairement équivalentes. Munissons $\mathcal{C}\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$ des normes N_1 et N_∞. Notons $f_n : t \in [0, 1] \mapsto t^n$. Alors $N_1(f_n) = 1/n$, tandis que $N_\infty(f_n) = 1$.

FIN