Développements limités

Table des matières

---

1 Définitions

Définition : soit a un réel ; nous dirons que la fonction f est définie *au voisinage* de a s'il existe $\alpha > 0$ tel que l'intervalle $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ soit contenu dans l'ensemble de définition de f.

Définition : soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0. Nous noterons $f(x) = o\big(g(x)\big)$ si g ne s'annule pas au voisinage de x_0, et si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

Définition : soit f définie au voisinage de x_0. Nous dirons que f possède un développement limité à l'ordre n, au voisinage de x_0, s'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(x) = P(x - x_0) + o\big((x - x_0)^n\big)$.

Nous utiliserons l'abréviation $DL_n(x_0)$.

Définition : $P(x - x_0)$ est la *partie régulière* du $DL_n(a)$, et $o\big((x - x_0)^n\big)$ le *reste*. On peut toujours se ramener au cas où $x_0 = 0$, quitte à composer à droite par $x \mapsto x - x_0$.

Proposition : f admet au plus un $DL_n(0)$.

Preuve : supposons que f possède deux $DL_n(0)$, avec des parties régulières P et Q distinctes. Soient k le degré et a le coefficient du terme de plus bas degré du polynôme $P - Q$; alors $(P - Q)(x) \underset{0}{\sim} ax^k$, avec $k \leqslant n$. Mais $(P - Q)(x) = o(x^n)$: ceci est contradictoire.

Remarque : si f admet un $DL_n(0)$ et est paire (resp. impaire), alors la partie régulière de son $DL_n(0)$ est un polynôme pair (resp. impair).

Exemple : $x \mapsto \dfrac{1}{1 - x}$ admet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un $DL_n(0)$, dont la partie régulière est $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} x^k$: ceci est une conséquence de la formule $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, pour $x \neq 1$.

2 Propriétés élémentaires

• Soient f définie sur $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ et possédant un $DL_n(x_0)$ et $\beta \in \left]0, \alpha\right[$. La restriction g de f à $[x_0-\beta, x_0+\beta]$ possède le même $DL_n(x_0)$ que f.

• Si f possède un $DL_n(0)$ de partie régulière P, elle possède aussi un $DL_k(0)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, dont la partie régulière est le reste dans la division euclidienne de P par X^{k+1} (troncature).

• f admet un $DL_0(x_0)$ ssi f possède une limite ℓ en x_0, auquel cas le $DL_0(x_0)$ est ℓ.

• f, définie sur un voisinage de x_0, admet un $DL_1(x_0)$ ssi elle est dérivable en x_0, auquel cas le $DL_1(x_0)$ est $f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$.

Un exemple intéressant : la fonction $f : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, prolongée par continuité en 0, admet un $DL_2(0)$, de partie régulière nulle, mais f n'est pas deux fois dérivable en 0.

3 Opérations sur les DL

3.1 Somme de deux développements limités

Proposition : l'ensemble des fonctions définies au voisinage de 0 et admettant un $DL_n(0)$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}$-e.v. des fonctions définies au voisinage de 0.

Preuve : soient f (resp. g) définie au voisinage de 0 et possédant un $DL_n(0)$ de partie régulière P (resp. Q), et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f + \lambda g$ possède un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est $A + \lambda B$, et fg admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est le reste dans la division euclidienne de AB par X^{n+1}.

Exemple : $e^{2x} + 3\sin(x) = 1 + 5x + 2x^2 + \dfrac{5x^3}{6} + o(x^2)$.

3.2 Produit de deux développements limités

Proposition : l'ensemble des fonctions définies au voisinage de 0 et admettant un $DL_n(0)$ est un sous-anneau de l'anneau des fonctions définies au voisinage de 0.

Preuve : $f(x) = A(x)+o(x^n)$, $g(x) = B(x)+o(x^n)$ et $AB = X^{n+1}Q+R$ avec $\deg(R) \leqslant n$. Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} (fg)(x) &= f(x)g(x) = \big(A(x) + o(x^n)\big) \times \big(B(x) + o(x^n)\big) \\ &= A(x)B(x) + o(x^n) = R(x) + Q(x)x^{n+1} + o(x^n) = R(x) + o(x^n) \end{aligned}$$

3.3 Quotient de deux développements limités

On peut utiliser la méthode des coefficients indéterminés pour déterminer le $DL_n(0)$ d'un quotient. Considérons par exemple $\tan(x) = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)$ (par raison de parité) ; alors $\sin(x) = \cos(x)\tan(x)$ implique

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)\left(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)\right)$$

Après identification, ceci nous donne $a = 1$, $b - \dfrac{a}{2} = -\dfrac{1}{6}$, et $c - \dfrac{b}{2} + \dfrac{a}{24} = \dfrac{1}{120}$; d'où $b = \dfrac{1}{3}$ et $c = \dfrac{2}{15}$, donc $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

4 Utilisation de la formule de Taylor-Young

Théorème : si $f^{(n)}(x_0)$ existe (ce qui implique que $f^{(n-1)}$ est définie sur un voisinage de x_0), alors f possède un $DL_n(x_0)$, dont la partie régulière est le polynôme $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$.

Remarque : nous admettrons ce théorème. Dans la pratique, nous n'utiliserons que des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$; la formule de Taylor avec reste intégral nous permet d'affirmer qu'une telle fonction possède un $DL_n(0)$ à tout ordre n et en tout point x_0 de son ensemble de définition.

Exemples : $e^x = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$; $\cos(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^k(x)^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$; $\sin(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$; $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n)$.

5 Intégration d'un $DL_n(0)$

Théorème : soit f définie et dérivable au voisinage de 0. Si f' admet un $DL_n(0)$, de partie régulière P, alors f admet un $DL_{n+1}(0)$ dont la partie régulière est $f(0) + \int_0^x P(t)\,dt$.

Preuve : $(f'-P)(x) = x^n\varepsilon(x)$, avec $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Fixons $\eta > 0$: il existe $\alpha > 0$ tel que $|\varepsilon(t)| \leqslant \eta$ pour $|t| \leqslant \alpha$. Alors

$$\left|f(x) - f(0) - \int_0^x P(t)\,dt\right| = \left|\int_0^x \big(f'(t) - P(t)\big)dt\right| = \left|\int_0^x t^n\varepsilon(t)\,dt\right| \leqslant \eta\left|\int_0^x t^n\,dt\right| = \eta\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \eta|x|^{n+1}$$

et ce, pour tout x tel que $|x| \leqslant \alpha$.

Quelques exemples : $\ln(1+x) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + o(x^n)$; $\ln(1-x) = -\sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$; $\operatorname{argth}(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$; $\arctan(x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$.

Remarque : si f possède un $DL_n(0)$, on ne peut en général rien affirmer concernant f', puisque l'on ne sait même pas si f est dérivable ; par exemple, $x \mapsto x^{1515}\chi_{\mathbb{Q}}$ possède un $DL_{1514}(0)$ (qui est nul), mais n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$ autre que 0.

Autre exemple intéressant : la fonction $f : x \mapsto x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, prolongée par continuité en 0 admet un $DL_2(0)$ de partie régulière nulle car $f(x) = o(x^2)$; $f'(x) = 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ peut elle aussi être prolongée par continuité en 0 ; mais $f''(0)$ ne peut être défini. Ceci dit, si f est dérivable sur un voisinage de 0, et si f' admet un $DL_n(0)$, celui-ci est obtenu en dérivant le $DL_{n+1}(0)$ de f.

6 Composition de deux développements limités

Théorème : Soient f définie au voisinage de 0, s'annulant en 0 et admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière A ; et g, définie au voisinage de 0, admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière B. Alors $g\circ f$ (qui est définie au voisinage de 0) possède un $DL_n(0)$, dont la partie régulière est le quotient dans la division euclidienne de $B\circ A$ par X^{n+1}.

Nous admettrons ce résultat. Dans la pratique, pour obtenir ce DL, il suffit de déterminer le $DL_n(0)$ de g : $g(u) = P(u) + o(u^n)$, puis de remplacer formellement u par $f(x)$, en regroupant toutes les quantités négligeables devant x^n en un seul $o(x^n)$.

Disposition pratique, en calculant par exemple le $DL_5(0)$ de $x \mapsto \sin\big(\operatorname{sh}(x)\big)$: $\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$, et $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$.

	x	x^2	x^3	x^4	x^5
$\operatorname{sh}(x)$	1		1/6		1/120
$\operatorname{sh}^2(x)$		1		1/3	
$\operatorname{sh}^3(x)$			1		1/2
$\operatorname{sh}^5(x)$					1

Compte tenu des parités, il n'a pas été nécessaire d'écrire le $DL_4(0)$ de $\operatorname{sh}^4(x)$. Les coefficients des cases vides sont nuls. D'où, par combinaison linéaire :

$$\sin\big(\operatorname{sh}(x)\big) = x - \frac{x^5}{15} + o(x^5)$$

7 Quelques astuces techniques

• Nous pouvons obtenir les premiers coefficients du $DL_n(0)$ de f en évaluant $f(10^{-k})$, avec k bien choisi. Par exemple, pour $f(x) = e^{e^x - 1}$, nous avons $f(0.01) \approx 1.01010084$, donc, selon toute vraisemblance, $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, ce que le calcul confirme.

• Cette méthode vaut également lorsque l'on demande un équivalent simple de f au voisinage de 0 ; cet équivalent doit être de la forme αx^k, mais on ne sait pas à quel ordre il faudra pousser le développement. En calculant $f(0.1)$ et $f(0.2)$ par exemple, nous pouvons éliminer α et en déduire k. Ainsi, avec $f : x \mapsto \sin\big(\tan(x)\big) - \tan\big(\sin(x)\big)$, nous trouvons $f(0.1) \approx -3.3\,10^{-9}$ et $f(0.2) \approx -4.5\,10^{-7}$, donc $2^k \approx 132$: l'exposant est probablement $k = 7$.

• Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ bijective, admettant un $DL_n(0)$, et nulle en 0. Supposons que la bijection réciproque g de f possède un $DL_n(0)$: c'est certainement le cas si f est de classe $\mathcal{D}^n$ et si de plus f' ne s'annule pas en 0. Nous pouvons facilement expliciter le $DL_n(0)$ de g, avec la méthode des coefficients indéterminés : il suffit de remplacer $g(x)$ par $P(x) + o(x^n)$ dans l'égalité $f\big(g(x)\big) = x$.

• Soit f définie au voisinage de 0, et solution sur ce voisinage d'une équation différentielle résolue en y'. nous pouvons obtenir le $DL_n(0)$ de f par identification. Pour fixer les idées, prenons l'exemple de la fonction tan ; elle vérifie $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. tan étant impaire, écrivons le $DL_6(0)$ de sa dérivée : $\tan'(x) = a + bx^2 + cx^4 + dx^6 + o(x^7)$, donc le $DL_7(0)$ de tan est $\tan(x) = ax + \dfrac{bx^3}{3} + \dfrac{cx^5}{5} + \dfrac{dx^7}{7} + o(x^7)$. Par identification, il vient $a = 1$, $3b = a^2$, donc $b = \dfrac{1}{3}$, $5c = 2ab$, donc $c = \dfrac{2}{15}$ et $7d = b^2 + 2ac$, donc $d = \dfrac{17}{315}$.

8 Cinq méthodes pour obtenir le $DL_5(0)$ de tan

1. appliquez la formule $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ (voir section 3.3 ;
2. appliquez la méthode des coefficients indéterminés à la relation $\sin(x) = \tan(x) \times \cos(x)$;
3. idem, avec la relation $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$;
4. idem, avec la relation $\tan\big(\arctan(x)\big) = x$;
5. idem, avec la relation $\arctan\big(\tan(x)\big) = x$.

FIN