Énoncé

Montrez que, si le déterminant d'une matrice A carrée d'ordre 3 est nul, alors les colonnes (ou les lignes) sont liées.

Corrigé

Nous éliminons le cas où A est la matrice nulle.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{pmatrix}$.

Le déterminant est calculé avec la règle de SARRUS : nous obtenons :

$$\det(A) = aqz + cpy + brx - ary - bpz - cqx = a(qz - ry) + p(yc - bz) + x(br - cq)$$

Observons que $b(qz - ry) + q(yc - bz) + y(br - cq)$ et $c(qz - ry) + r(yc - bz) + z(bx - cq)$ sont nuls.

Notant $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ les trois colonnes de A, nous obtenons la relation de dépendance $(qz - ry)\vec{u} + (yc - bz)\vec{v} + (br - cq)\vec{w} = \overrightarrow{0}$.

Si l'un au moins des trois scalaires $qz - ry$, $yc - bz$ et $br - cq$ n'est pas nul, alors les trois colonnes sont liées.

Sinon, les trois scalaires sont nuls. Nous pouvons supposer, par exemple $y \neq 0$. Alors $c = \frac{z}{y}b$, $r = \frac{z}{y}q$ et $z = \frac{z}{y}y$ ce qui nous donne $\vec{w} = \frac{z}{y}\vec{v}$. Donc les lignes 2 et 3 sont liées.

Fin de la preuve.