

Énoncé

Montrez que, si le déterminant d'une matrice A carrée d'ordre 3 est nul, alors les colonnes (ou les lignes) sont liées.

Corrigé

Nous éliminons le cas où A est la matrice nulle.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{pmatrix}.$$

Le déterminant est calculé avec la règle de SARRUS : nous obtenons :

$$\det(A) = aqz + cpy + brx - ary - bpz - cqx = a(qz - ry) + p(yz - bx) + x(br - cq)$$

Observons que $b(qz - ry) + q(yz - bx) + y(br - cq)$ et $c(qz - ry) + r(yz - bx) + z(br - cq)$ sont nuls.

Notant \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} les trois colonnes de A , nous obtenons la relation de dépendance $(qz - ry)\vec{u} + (yz - bx)\vec{v} + (br - cq)\vec{w} = \vec{0}$.

Si l'un au moins des trois scalaires $qz - ry$, $yz - bx$ et $br - cq$ n'est pas nul, alors les trois colonnes sont liées.

Sinon, les trois scalaires sont nuls. Nous pouvons supposer, par exemple $y \neq 0$. Alors $c = \frac{z}{y}b$, $r = \frac{z}{y}q$ et

$z = \frac{z}{y}y$ ce qui nous donne $\vec{w} = \frac{z}{y}\vec{v}$. Donc les lignes 2 et 3 sont liées.

Fin de la preuve.