

1 Généralités

1.1 Arcs paramétrés

\mathcal{E} désigne un espace affine euclidien de dimension n , muni d'un repère orthonormé (O, \mathcal{B}) avec $\mathcal{B} = (\vec{e}_k)_{1 \leq k \leq n}$. \mathbf{E} désigne l'espace vectoriel euclidien sous-jacent. En pratique, $n = 2$ (coubres planes) ou $n = 3$ (courbes gauches).

Déf: un *arc paramétré* de \mathcal{E} est un couple (I, f) où I est un intervalle de \mathbb{R} , et f une application de I dans \mathcal{E} . Nous lui associons l'application \vec{F} de I dans \mathbf{E} définie par $f(t) = O + \vec{F}(t)$; et, un repère de \mathcal{E} étant fixé, les applications $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ de I dans \mathbb{R} définies par $\vec{F}(t) = \sum_{k=1}^n x_k(t) \vec{e}_k$.

Nous dirons que f possède une certaine propriété (continuité, dérivabilité, classe \mathcal{C}^k ou \mathcal{C}^∞) lorsque \vec{F} possède cette même propriété. Il est clair que ceci ne dépend pas de l'origine choisie, et que f possède cette propriété si et seulement si toutes les applications x_k la possèdent.

Déf: le *support* d'un arc (I, f) est l'image de I par f . C'est donc une «courbe» de \mathcal{E} .

Un point M du support est *simple* s'il n'a qu'un antécédent par f , *multiple* dans le cas contraire (*double* s'il a deux antécédents, etc...)

Un arc est *fermé* si $I = [a, b]$ et $f(a) = f(b)$.

Dans la suite, nous ne considérerons que des arcs (I, f) dans lesquels f est au moins *continue* (et même, en pratique, de classe \mathcal{C}^k avec k «assez grand»). En particulier, un arc (I, f) est de classe \mathcal{C}^k lorsque f est de classe \mathcal{C}^k .

1.2 Changement de paramètre

Nous considérons deux arcs (I, f) et (J, g) tels qu'il existe $\varphi : I \mapsto J$ surjective vérifiant $f = g \circ \varphi$. Dans ces conditions, (I, f) et (J, g) ont le même support.

La remarque faite plus haut implique que, dans la pratique, nous ne considérons que des applications φ continues; de plus, pour satisfaire certains besoins qui vont apparaître dans la suite, nous exigerons que φ soit également injective, donc φ bijective.

Déf: une bijection φ entre deux intervalles I et J de \mathbb{R} est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme si elle est de classe \mathcal{C}^k ainsi que sa bijection réciproque φ^{-1} .

Théorème 1 $\varphi : I \mapsto J$ est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme ssi φ est de classe \mathcal{C}^k et φ' ne s'annule pas sur I .

Preuve: le sens direct est évident. Pour la réciproque, nous prouvons par récurrence sur j que $(\varphi^{-1})^{(j)}$ est de la forme $\frac{P(\varphi', \dots, \varphi^{(j)})}{(\varphi')^{2j-1}} \circ \varphi^{-1}$, où P est un «polynôme».

1.3 Arcs géométriques

Déf: deux arcs paramétrés (I, f) et (J, g) sont \mathcal{C}^k -équivalents s'il existe un \mathcal{C}^k -difféomorphisme φ de I sur J tel que $f = g \circ \varphi$. Nous vérifions aisément que nous avons défini une relation d'équivalence entre arcs paramétrés. Notons que nous ne faisons ici aucune hypothèse sur les classes respectives de f et de g .

Déf: un *arc géométrique de type \mathcal{C}^k* est une classe d'équivalence d'arcs paramétrés pour la \mathcal{C}^k -équivalence.

Il est clair que si un représentant au moins, pour la \mathcal{C}^k -équivalence, d'un tel arc est de classe \mathcal{C}^k , tous les autres le sont aussi, ce qui amène la définition suivante, plus intéressante.

Déf: un arc géométrique est *de classe \mathcal{C}^k* s'il est de type \mathcal{C}^k et si l'un au moins de ses représentants pour la \mathcal{C}^k -équivalence est de classe \mathcal{C}^k .

Déf: un représentant d'un arc géométrique de classe \mathcal{C}^k est *admissible* s'il est de classe \mathcal{C}^k .

Théorème 2 soient (I, f) et (J, g) deux arcs paramétrés de classe \mathcal{C}^k et \mathcal{C}^k -équivalents, via le \mathcal{C}^k -difféomorphisme $\varphi : I \mapsto J$; soit $t_0 \in I$ et $t_0 = \varphi(u_0)$. Les s.e.v. $\text{Vect}(\vec{F}'(t_0), \dots, \vec{F}^{(k)}(t_0))$ et $\text{Vect}(\vec{G}'(u_0), \dots, \vec{G}^{(k)}(u_0))$ de \mathbf{E} sont identiques.

Preuve: récurrence sur k .

1.4 Orientation d'un arc géométrique

Déf: soit Γ un arc géométrique de classe \mathcal{C}^k . Deux représentants admissibles (I, f) et (J, g) de Γ sont *de même sens* si le \mathcal{C}^k -difféomorphisme $\varphi : I \mapsto J$ tel que $f = g \circ \varphi$ est croissant; *de sens contraire* s'il est décroissant.

Théorème 3 sur l'ensemble des représentants admissibles d'un arc géométrique Γ , la relation «être de même sens» est une équivalence pour laquelle il y a au plus deux classes.

Déf: *orienter* un arc géométrique Γ , c'est choisir l'une de ces classes, lorsqu'il y en a deux.

Remarque: il est naturel de se demander si, parmi tous les paramétrages admissibles d'un arc géométrique Γ donné, il en existe un «plus intéressant» que les autres. Nous verrons lors de l'étude de la *rectification*, qu'il est possible de donner une réponse positive à cette question, pour une large classe d'arcs (dits *rectifiables*).

1.5 Représentation propre

Considérons l'arc paramétré $(]0, +\infty[, f)$ où f est définie par les coordonnées suivantes dans un repère donné: $x(t) = t + \frac{1}{t}$, $y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$. Il est facile de voir que $f(t) = f(\frac{1}{t})$ pour tout $t \in]0, +\infty[$. Nous considérerons que cette représentation est *impropre*, puisque chaque point de l'arc est obtenu deux fois. Il est clair que nous obtenons le même support en prenant pour arc paramétré $([1, +\infty[, g)$ où g est la restriction de f à $[1, +\infty[$.

Si nous ne sommes intéressés que par les propriétés de l'arc géométrique, nous aurons avantage à chercher une telle représentation, que nous qualifierons de *propre*; une définition précise de cette notion pose toutefois des problèmes, et nous nous contenterons de cette présentation intuitive. La recherche d'une représentation propre devra être faite systématiquement lorsque les coordonnées du paramétrage sont des fonctions périodiques, ou ayant toutes deux une parité intéressante.

Dans un problème de *cinématique* (étude du mouvement d'un point), il est par contre impératif de respecter la représentation de l'énoncé, puisque le paramètre t a un sens physique: c'est le temps. Ainsi, dans l'exemple précédent, nous vérifions aisément qu'une équation du support est $(y = x^2 - 2, x \geq 2)$: c'est un arc de parabole, décrit dans un sens quand t varie de 0 à 1, puis décrit dans le sens inverse quand t varie de 1 à $+\infty$.

2 Étude locale

2.1 Tangente

Déf: soient Γ un arc géométrique de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$; (I, f) une représentation admissible de Γ ; $t_0 \in I$. Si $\overrightarrow{F'}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$, $f(t_0)$ est un *point régulier*. Dans ces conditions, pour h assez petit, mais non nul, nous aurons $f(t_0 + h) \neq f(t_0)$; la droite passant par $f(t_0)$ et $f(t_0 + h)$ est dirigée par le vecteur $\frac{\overrightarrow{F'}(t_0 + h) - \overrightarrow{F'}(t_0)}{h}$, dont la limite quand $h \rightarrow 0$ est $\overrightarrow{F'}(t_0)$. Nous dirons que la droite passant par $f(t_0)$ et dirigée par $\overrightarrow{F'}(t_0)$ est la *tangente* à Γ en ce point.

Un point non régulier est dit *singulier*, ou encore *stationnaire*: l'interprétation cinématique de ce dernier terme est clair, il s'agit des points où la vitesse du mobile s'annule.

Si $\overrightarrow{F'}(t_0) = \overrightarrow{0}$, soit p le plus petit indice tel que $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$ (si toutefois un tel indice existe); la formule de Taylor-Young permet d'écrire:

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + \frac{h^p}{p!} \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) + h^p \overrightarrow{\varepsilon}(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \overrightarrow{\varepsilon}(h) = \overrightarrow{0}$. Nous aboutissons à la même conclusion que dans le cas d'un point régulier, en remplaçant $\overrightarrow{F'}(t_0)$ par $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$.

Si (J, g) est une autre représentation admissible de Γ , alors, notant $\varphi : J \mapsto I$ tel que $g = f \circ \varphi$, et $u_0 = \varphi^{-1}(t_0)$, nous aurons $\overrightarrow{G'}(u_0) = \varphi'(u_0) \overrightarrow{F'}(\varphi(u_0)) = \varphi'(u_0) \overrightarrow{F'}(t_0)$; comme $\varphi'(u_0) \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{F'}(t_0)$ et $\overrightarrow{G'}(u_0)$ sont simultanément nuls ou simultanément non nuls: le fait pour un point d'un arc géométrique d'être régulier ou singulier est donc une propriété *intrinsèque*, indépendante du paramétrage.

Plus généralement, si Γ est de classe \mathcal{C}^k , ainsi que \overrightarrow{F} , \overrightarrow{G} et φ , alors: (i) si tous les $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ sont nuls, il en est de même pour les $\overrightarrow{G^{(p)}}(u_0)$; (ii) dans le cas contraire, le plus petit indice p tel que $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) \neq 0$ vérifie la même propriété pour G .

Ainsi, la définition que nous avons donnée de la tangente est elle aussi intrinsèque.

Notons que, si p est impair (en particulier en un point régulier), alors, pour h assez voisin de 0, la projection orthogonale de $\overrightarrow{f(t)f(t_0+h)}$ sur la tangente a même sens que $\overrightarrow{F^{\vec{p}}}(t_0)$ pour $h > 0$, et le sens opposé pour $h < 0$: en termes de cinématique, nous dirons que la tangente est dirigée dans le sens du mouvement.

2.2 Repère local

Nous supposons dans cette partie que \mathcal{E} est de dimension 2.

Soit Γ un arc géométrique de classe \mathcal{C}^k avec $k \geq 2$. Soit (I, f) une représentation admissible de Γ . Soit $t_0 \in I$. Notons (H) l'hypothèse suivante :

» il existe $p \geq 1$ et $q > p$ tels que $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ et $\overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)$ soient indépendants»

Sans restreindre la généralité, nous pouvons alors supposer que p est le plus petit indice tel que $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ soit non nul, et q le plus petit indice supérieur à p tel que $\overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)$ ne soit pas colinéaire à $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$. Le point $f(t_0)$ et ces deux vecteurs forment alors un repère de \mathcal{E} , qualifié de *local*. Écrivons la formule de Taylor-Young :

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + \frac{h^p}{p!} \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) + \sum_{k=p+1}^{q-1} \frac{h^k}{k!} \overrightarrow{F^{(k)}}(t_0) + \frac{h^q}{q} \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0) + h^q \cdot \overrightarrow{\varepsilon}(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \overrightarrow{\varepsilon}(h) = \overrightarrow{0}$. L'hypothèse faite sur p et q implique l'existence de réels $(\lambda_k)_{p < k < q}$ tels que $\overrightarrow{F^{(k)}}(t_0) = \lambda_k \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ pour tout $k \in$

IntervalleDiscret $p+1, \dots, q-1$. En décomposant $\overrightarrow{\varepsilon}(h)$ sur la base constituée par $\overrightarrow{F^{(p)}}(t_0)$ et $\overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)$, nous mettons en évidence :

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + \left(\frac{h^p}{p!} + h^p \varepsilon_1(h) \right) \overrightarrow{F^{(p)}}(t_0) + \left(\frac{h^q}{q} + h^q \varepsilon_2(h) \right) \overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2(h) = 0$. Donc les composantes dans le repère local de $f(t_0 + h) - f(t_0)$ ont, respectivement, le signe de h^p et de h^q pour h assez petit. Ceci amène à distinguer quatre cas de figure, selon les parités respectives de p et q .

1er cas : p impair, q pair. C'est le cas «générique», obtenu lorsque $p = 1$ et $q = 2$ (nous dirons alors que le point $f(t_0)$ est *birégulier*) : la courbe reste d'un même côté de sa tangente, mais traverse la droite passant par $f(t_0)$ et dirigée par $\overrightarrow{F^{(q)}}(t_0)$.

2ème cas : p et q impairs : la courbe traverse sa tangente ; nous avons un *point d'inflexion*.

3ème cas : p pair, q impair : nous avons un *point de rebroussement de première espèce*.

4ème cas : p et q pairs : nous avons un *point de rebroussement de deuxième espèce*.

Remarque : la nature du point $f(t_0)$, lorsque l'hypothèse (H) est vérifiée, est indépendante du paramétrage admissible adopté, toujours grâce au théorème du 1.4 : si g est un autre paramétrage admissible, il fournira les mêmes valeurs de p et q .

En pratique, nous déterminons la nature d'un point singulier en observant des DL des applications x et y au voisinage de t_0 .

La notion de repère local s'étend au cas d'un arc dans un espace de dimension $n > 2$, en considérant cette fois n vecteurs $\overrightarrow{F^{(p_i)}}(t_0)$, $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_n$, indépendants.

2.3 Concavité

Dans cette partie, nous supposons que \mathcal{E} est orienté, par le choix d'une orientation de l'e.v. \mathbf{E} sous-jacent.

Considérons un point $m(t_0)$ birégulier : les vecteurs $\overrightarrow{F^{\vec{1}}}(t_0)$ et $\overrightarrow{F^{\vec{2}}}(t_0)$, indépendants, forment une base de \mathbf{E} ; par continuité, il en est de même pour les vecteurs $\overrightarrow{F^{\vec{1}}}(t)$ et $\overrightarrow{F^{\vec{2}}}(t)$, pour t assez voisin de t_0 , ceci car $\overrightarrow{F^{\vec{1}}}(t)$ et $\overrightarrow{F^{\vec{2}}}(t)$ sont indépendants si et seulement si leur déterminant dans une base quelconque est non nul, or ce dernier est une fonction continue de t . De plus, l'orientation de cette base étant fournie par le déterminant de ces deux vecteurs, reste également la même pour t assez voisin de t_0 ; ceci, car le déterminant $\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix}$ est une fonction *continue* de t , donc garde une signe constant au voisinage de t_0 .

En particulier, prenons $\omega = f(t_0)$, $u = \overrightarrow{F}(t_0)$ et v tel que (u, v) ait même orientation que (i, j) . Comme $X'(t_0) \neq 0$, localement, $X'(t_0)$ garde un signe constant, donc X réalise une bijection : nous pouvons donc écrire $Y(t) = Y(X^{-1}(x))$: ainsi, localement, nous pouvons paramétrer par $\eta = \varphi(\xi)$ et appliquer les résultats sur la convexité.

Nous dirons que, si l'orientation du repère local reste la même sur un sous-intervalle J de I , la concavité de l'arc $(J, f|_J)$ reste la même. La courbe change de concavité aux points où le déterminant $\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix}$ change de signe, et (éventuellement) aux points non biréguliers.

Avec l'orientation «standard» du plan, le déterminant sera positif lorsque l'arc, décrit dans le sens des t croissants, «tourne vers la gauche». Notons qu'un changement de paramétrage conserve ou inverse ce sens de rotation, selon que le nouveau paramétrage est de même sens que l'ancien ou de sens inverse ; en effet, en notant $G = F \circ \varphi$ le nouveau paramétrage, nous aurons $G' = \varphi' F' \circ \varphi$ et $G'' = \varphi'' F' \circ \varphi + (\varphi')^2 F'' \circ \varphi$, donc $\det(G', G'') = (\varphi')^3 \cdot \det(F', F'')$.

3 Branches infinies

3.1 Définitions

Soit A un point de \mathcal{E} . Soit (I, f) un représentant admissible d'un arc géométrique Γ et $t_0 \in \bar{I}$; nous dirons que (I, f) possède une *branche infinie* quand $t \rightarrow t_0$ ssi $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t) - A\| = +\infty$. Cette propriété ne dépend manifestement pas du choix de A ; si nous prenons $A = O$, nous aurons comme caractérisation : $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\overrightarrow{F}(t)\| = +\infty$. En particulier, pour une courbe plane, ceci revient à satisfaire l'une au moins des conditions (i) $\lim_{t \rightarrow t_0} |x(t)| = +\infty$ ou (ii) $\lim_{t \rightarrow t_0} |y(t)| = +\infty$, où x et y désignent les fonctions coordonnées de f dans un repère quelconque (nous vérifions aisément, ici encore, que cette caractérisation ne dépend pas du repère choisi).

Soit (J, g) un autre représentant admissible de Γ et φ telle que $f = g \circ \varphi$; notant $u_0 = \varphi(t_0)$, nous vérifions aisément que $u_0 \in \bar{J}$, et que $\lim_{u \rightarrow u_0} \|g(u) - A\| = +\infty$. Ainsi, l'existence d'une branche infinie est une propriété de l'arc géométrique Γ , et non une propriété particulière à tel représentant admissible.

3.2 Directions asymptotiques

Théorème 4 soit (I, f) un représentant admissible d'un arc géométrique Γ , possédant une branche infinie quand $t \rightarrow t_0 \in \bar{I}$, et A un point de \mathcal{E} . Si la pente de la demi-droite joignant A à $m(t)$ a une limite quand $t \rightarrow t_0$, cette limite ne dépend pas de A .

Preuve : notons d'abord que, pour t assez voisin de t_0 , on a certainement $m(t) \neq A$. Soit B un autre point, $\overrightarrow{u}(t)$ (resp. $\overrightarrow{v}(t)$) le vecteur unitaire ayant même direction et même sens que $m(t) - A$ (resp. $m(t) - B$). Nous voulons prouver que, si $\overrightarrow{u}(t)$ a une limite quand $t \rightarrow t_0$, alors $\overrightarrow{v}(t)$ a la même limite :

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{\overrightarrow{Bm}(t)}{\|\overrightarrow{Bm}(t)\|} = \frac{\overrightarrow{Bm}(t)}{\|\overrightarrow{Am}(t)\|} \cdot \frac{\|\overrightarrow{Am}(t)\|}{\|\overrightarrow{Bm}(t)\|} = \left(\frac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{Am}(t)\|} + \frac{\overrightarrow{Am}(t)}{\|\overrightarrow{Am}(t)\|} \right) \cdot \frac{\|\overrightarrow{Am}(t)\|}{\|\overrightarrow{Bm}(t)\|}$$

or : $\frac{\overrightarrow{BA}}{\|\overrightarrow{Am}(t)\|} \rightarrow \overrightarrow{0}$; et $\frac{\|\overrightarrow{Am}(t)\|}{\|\overrightarrow{Bm}(t)\|} \rightarrow 1$ car $\|\overrightarrow{Bm}(t)\| - \|\overrightarrow{AB}\| \leq \|\overrightarrow{Bm}(t)\| \leq \|\overrightarrow{Bm}(t)\| + \|\overrightarrow{AB}\|$, donc :

$$1 - \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{Bm}(t)\|} \leq \frac{\|\overrightarrow{Am}(t)\|}{\|\overrightarrow{Bm}(t)\|} \leq 1 + \frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{Bm}(t)\|}$$

Déf : si la pente de la demi-droite joignant A à $m(t)$ a une limite quand $t \rightarrow t_0$, on dira que Γ présente une *direction asymptotique*. On notera que celle-ci est une demi-droite (vectorielle).

3.3 Asymptotes

Déf : soit (I, f) un représentant admissible d'un arc géométrique Γ , possédant une branche infinie quand $t \rightarrow t_0 \in \bar{I}$, et soit Δ une droite de \mathcal{E} . On dira que Δ est asymptote à Γ quand $t \rightarrow t_0$, ssi $\lim_{u \rightarrow u_0} d(f(t), \Delta) = 0$.

Th : si Δ est asymptote à Γ quand $t \rightarrow t_0$, alors la direction de Δ est direction asymptotique de Γ quand $t \rightarrow t_0$.

Preuve : fixons $A \in \Delta$, et notons $h(t)$ la projection orthogonale de $f(t)$ sur Δ , et $\vec{u}(t) = \frac{\overrightarrow{Am(t)}}{\|\overrightarrow{Am(t)}\|}$. On

a : $\|\overrightarrow{Ah(t)}\| - \|\overrightarrow{h(t)m(t)}\| \leq \|\overrightarrow{Am(t)}\| \leq \|\overrightarrow{Ah(t)}\| + \|\overrightarrow{h(t)m(t)}\|$; nous savons que $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\overrightarrow{Am(t)}\| = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\overrightarrow{h(t)m(t)}\| = \lim_{t \rightarrow t_0} d(m(t), \Delta) = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\overrightarrow{Ah(t)}\| = +\infty$.

Alors : $1 - \frac{\|\overrightarrow{h(t)m(t)}\|}{\|\overrightarrow{Ah(t)}\|} \leq \frac{\|\overrightarrow{Am(t)}\|}{\|\overrightarrow{Ah(t)}\|} \leq 1 + \frac{\|\overrightarrow{h(t)m(t)}\|}{\|\overrightarrow{Ah(t)}\|}$ donc $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\|\overrightarrow{Am(t)}\|}{\|\overrightarrow{Ah(t)}\|} = 1$. En écrivant

$$\vec{u}(t) = \frac{\overrightarrow{Ah(t)}}{\|\overrightarrow{Am(t)}\|} + \frac{\overrightarrow{h(t)m(t)}}{\|\overrightarrow{Am(t)}\|} = \frac{\overrightarrow{Ah(t)}}{\|\overrightarrow{Ah(t)}\|} \cdot \frac{\|\overrightarrow{Ah(t)}\|}{\|\overrightarrow{Am(t)}\|} + \frac{\overrightarrow{h(t)m(t)}}{\|\overrightarrow{Am(t)}\|}$$

on met en évidence $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{u}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\overrightarrow{Ah(t)}}{\|\overrightarrow{Ah(t)}\|} = \vec{\delta}$ vecteur unitaire dirigeant Δ , et dont le sens, pour t voisin de t_0 , est fixé.

Recherche pratique d'une asymptote, pour une courbe plane : si, quand $t \rightarrow t_0$, l'une des deux coordonnées a une limite finie, tandis que l'autre tend vers $\pm\infty$, on a directement une équation de l'asymptote : $X = X_0$ si $\lim_{t \rightarrow t_0} X(t) = X_0$; $Y = Y_0$ si $\lim_{t \rightarrow t_0} Y(t) = Y_0$. Sinon, on établit l'existence d'une direction asymptotique quand

$t \rightarrow t_0$, en montrant que $\frac{y(t)}{x(t)}$ a une limite finie $\ell \neq 0$. On s'intéresse ensuite à la quantité $y(t) - \ell x(t)$; si \vec{U}

désigne un vecteur unitaire directeur de la direction asymptotique et \vec{V} un vecteur unitaire et normal à \vec{U} , alors $y(t) - \ell x(t)$ est l'ordonnée du point $f(t)$ dans le repère de même origine O , et de vecteurs de base \vec{U} et \vec{V} . Si l'on trouve une limite finie m , il ne reste plus qu'à étudier le signe de $y(t) - \ell x(t) - m$ au voisinage de t_0 pour placer la courbe par rapport à son asymptote. Bien entendu, l'utilisation de développements limités permet souvent de régler rapidement la question.

4 Quelques problèmes pratiques

► Le lecteur est cordialement invité à se munir de papier, crayon, gomme, et à faire les études proposées.

4.1 Études pratiques complètes

Exemple 1 : $x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$, $y = \frac{t(t^2 - 1)}{t^2 + 1}$; $t \mapsto -t$: met en évidence la symétrie par rapport à (O, u)

Exemple 2 : $x = \frac{\ln(t)}{t}$, $y = t \ln(t)$: $t \mapsto \frac{1}{t}$; symétrie par rapport à la droite d'équation $x + y = 0$.

Exemple 3 : $x = \cos(t)$, $y = \sin\left(\frac{t}{5}\right)$

Exemple 4 : $x = \frac{t^3}{(t-1)(t+2)}$, $y = \frac{t(t-2)}{t-1}$; asymptote oblique d'équation $y = -3x + \frac{8}{3}$; point double obtenu pour $t = \pm\sqrt{2}$, soit $x = 2$ et $y = -2$ (cf. plus bas)

4.2 Recherche des points doubles

On résout le système

$$(S) \quad \begin{cases} x(u) = x(v) \\ y(u) = y(v) \\ u \neq v \end{cases}$$

Si x et y sont des fonctions rationnelles, on pourra «mettre en facteur» $u - v$, et chercher à mettre en évidence $S = u + v$ et $P = uv$.

Exemple: $x = \frac{t^2 - 1}{t}$, $y = \frac{t + 1}{t^2}$. L'étude montre qu'il «doit» y avoir un point double, qui semble «peu éloigné» du point de coordonnées (1,1); écrivons le système

$$\begin{cases} \frac{u^2 - 1}{u} = \frac{v^2 - 1}{v} \\ \frac{u + 1}{u^2} = \frac{v + 1}{v^2} \\ u \neq v \end{cases} \iff \begin{cases} u^2v - v - uv^2 + u = 0 \\ uv^2 + v^2 - u^2v - u^2 = 0 \\ u \neq v \end{cases} \iff \begin{cases} (u - v)(uv + 1) = 0 \\ (u - v)(-uv - u - v) = 0 \\ u \neq v \end{cases}$$

Soit finalement
$$\begin{aligned} uv &= -1 \\ u + v &= -uv = 1 \end{aligned}$$

Donc u et v sont les solutions de l'équation (E): $T^2 - T - 1 = 0$, soit $u = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $v = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Comme (E) s'écrit aussi $T^2 = T + 1$, on aura $x(u) = \frac{u + 1 - 1}{u} = 1$ et $y(u) = \frac{u + 1}{u + 1} = 1$; sur cet exemple, comme sur bien d'autres, il ne faut pas évaluer $x(u)$ et $y(u)$ à partir de la valeur de u , mais chercher à exploiter la relation satisfaite par u .

Remarque: éviter de choisir des noms compliqués (par exemple t_1 et t_2) pour les inconnues...

Méthode du PGCD: si $x(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ et $y(t) = \frac{R(t)}{S(t)}$ où P, Q, R et S sont des polynômes en t , (x, y) est un point double ssi les équations $xQ(t) - P(t) = 0$ et $yS(t) - R(t) = 0$ ont au moins deux racines en commun, ce qui revient à dire que le PGCD de $xQ(t) - P(t)$ et $yS(t) - R(t)$ est de degré au moins 2, ou encore que, dans la suite des divisions de l'algorithme d'EUCLIDE, le reste de degré inférieur à 2 est identiquement nul. Sur l'exemple 4 plus haut, on arrive à:

$$\begin{aligned} t^3 - xt^2 - xt + 2x &= 0 \\ t^2 - (2 + y)t + y &= 0 \end{aligned}$$

ce qui mène au reste $(y + 2)(y - x + 2)t - y(y - x + 2) = 0$ d'où $x = 2$ et $y = -2$.

4.3 Recherche des points à tangente particulière

Recherche de t tel que la tangente au point $(x(t), y(t))$ passe par un point (x_0, y_0) donné: on écrit que le vecteur directeur directeur de la tangente, soit en général $(x'(t), y'(t))$, dirige la droite joignant les deux points; soit:

$$\begin{vmatrix} x(t) - x_0 & x'(t) \\ y(t) - y_0 & y'(t) \end{vmatrix} = 0$$

Il faudra, au besoin, examiner si la tangente en chaque point stationnaire répond à la question.

4.4 Recherche de points alignés

On obtient les paramètres t, u et v de trois points alignés en résolvant l'équation:

$$\begin{vmatrix} x(t) - x(u) & x(t) - x(v) \\ y(t) - y(u) & y(t) - y(v) \end{vmatrix} = 0, \text{ où } t \neq u, u \neq v \text{ et } v \neq t.$$

4.5 Détermination d'une équation cartésienne

Il faut éliminer le paramètre t entre les équations $X = x(t)$ et $Y = y(t)$ pour obtenir une relation $\varphi(X, Y) = 0$ indépendante de t .

Exemple 1: $X = t + \frac{1}{t}$, $Y = t + 2 - \frac{1}{t}$. Par somme et différence, ceci équivaut à: $X + Y = 2t + 2$ et $X - Y = \frac{2}{t} - 2$, soit encore $(X + Y - 2)(X - Y + 2) = 0$ ou $\frac{X^2}{4} - \frac{(Y - 2)^2}{4} = 1$: la courbe est portée par une hyperbole. Il n'y a plus qu'à vérifier que tout point de cette hyperbole est effectivement atteint.

Exemple 2: $X = \frac{t}{1 + t + t^2}$, $Y = \frac{t^2}{1 + t + t^2}$. Remplaçons t par $\frac{Y}{X}$ dans l'expression de X , il vient: $(1 + \frac{Y}{X} + \frac{Y^2}{X^2})X = \frac{Y}{X}$, soit $X^2 + XY + Y^2 = Y$, équation d'une conique; l'allure de la courbe (ou le fait que X et Y sont des fonctions bornées de t) indique qu'il s'agit d'une ellipse, privée du point de coordonnées (0,1), qui

correspond à $t = \pm\infty$ (des raisons de topologie différentielle font qu'il n'existe pas de paramétrage propre (I, f) d'une ellipse, avec I ouvert).