# Coniques : définition bifocale

## Ellipse : définition bifocale

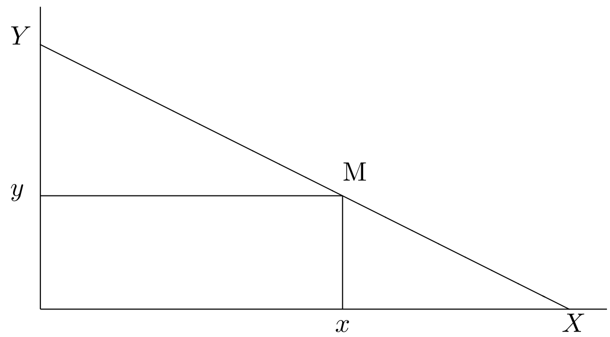
Soit $\mathcal{R} = (0; i, j)$ un repère orthonormé. Notons $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ dans le repère $\mathcal{R}$. Nous montrons que $\mathcal{E}$ est exactement l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant $MF + MF' = 2a$, où $F$ et $F'$ sont les foyers de $\mathcal{E}$. Notons $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ; les foyers de $\mathcal{E}$ sont les points $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$.
Nous avons :

$$\begin{aligned}
MF + MF' = 2a \quad &\iff \quad (MF + MF')^2 = 4a^2 \\
&\iff \quad (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 + 2MF \cdot MF' = 4a^2 \\
&\iff \quad 2x^2 + 2y^2 + 2c^2 + 2MF \cdot MF' = 4a^2 \\
&\iff \quad MF \cdot MF' = 2a^2 - c^2 - x^2 - y^2 \\
&\Rightarrow \quad (MF \cdot MF')^2 = (a^2 + b^2 - x^2 - y^2)^2 \\
&\iff \quad (x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \cdot (x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = (a^2 + b^2 - x^2 - y^2)^2 \\
&\iff \quad (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = (a^2 + b^2 - x^2 - y^2)^2 \\
&\iff \quad (x^2 + y^2 + c^2)^2 - (a^2 + b^2 - x^2 - y^2)^2 = 4c^2x^2 \\
&\iff \quad (a^2 + b^2 + c^2) \cdot (2x^2 + 2y^2 + c^2 - a^2 - b^2) = 4c^2x^2 \\
&\iff \quad 2a^2 \cdot 2(x^2 + y^2 - b^2) = 4c^2x^2 \\
&\iff \quad a^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = c^2x^2 \iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\
&\iff \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1
\end{aligned}$$

Il reste à prouver que l'implication de la cinquième ligne est en fait une équivalence. Observons que, à la dernière ligne, $x^2 \leqslant a^2$ et $y^2 \leqslant b^2$ ; donc la quantité $a^2 + b^2 - x^2 - y^2$ est positive, ce qui termine la preuve.
Méthode du jardinier : on plante un piquet en chacun des foyers. On les relie par une corde de longueur $2a$. On utilise un troisième piquet pour tendre la corde ; en faisant glisser ce piquet le long de la corde, on trace une demi-ellipse.

## La méthode de la bande de papier

Les deux triangles sont proportionnels. Ceci nous donne les relations $\dfrac{x}{a} = \dfrac{X}{a+b}$ et $\dfrac{Y-y}{a} = \dfrac{Y}{a+b}$, dont nous déduisons $aX = (a+b)x$ et $bY = (a+b)y$. Avec le théorème de Pythagore, il vient $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{X^2}{(a+b)^2} + \dfrac{Y^2}{(a+b)^2} = 1$.




## Ellipse : formulaire

$a$ est le demi-grand axe ; $b$ est le demi-petit axe ; $c$ est la demi-distance des foyers ; on a $a^2 = b^2 + c^2$ ; l'excentricité est $c/a$ ; les directrices ont pour équations $x = \pm a^2/c$. Le tableau ci-contre présente deux paramétrages.

| | | |
|---|---|---|
| $x = a\cos(t)$ | $y = b\sin(t)$ | $0 \leqslant t < 2\pi$ |
| $x = a\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ | $y = \dfrac{2bu}{1+u^2}$ | $\lvert u\rvert < \pi/2$ |

Interprétation du paramètre $t$ : soit $M(x, y) \in \mathcal{E}$, de paramètre $t$ ; le point $M'(x, ay/b)$ est sur le cercle *principal* de l'ellipse ; $t$ est l'angle entre les vecteur $i$ et $OM'$.
L'aire de l'ellipse est $\pi ab$. La longueur de l'ellipse ne peut pas être exprimée simplement en fonction de $a$ et $b$ ; elle est donnée par la série

$$2\pi a\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \cdots\right)$$

## Hyperbole : définition bifocale

Soit $\mathcal{R} = (0; i, j)$ un repère orthonormé. Notons $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ dans le repère $\mathcal{R}$. Nous montrons que $\mathcal{H}$ est exactement l'ensemble des points $M(x, y)$ qui vérifient $|MF - MF'| = 2a$, où $F$ et $F'$ sont les foyers de $\mathcal{H}$.

Notons $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ; les foyers de $\mathcal{H}$ sont les points $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$.

Nous avons :

$$\begin{aligned}
|MF - MF'| = 2a \quad &\iff \quad (MF - MF')^2 = 4a^2 \\
&\iff \quad (x-c)^2 + y^2 + (x+c)^2 + y^2 - 2MF \cdot MF' = 4a^2 \\
&\iff \quad 2x^2 + 2y^2 + 2c^2 - 2MF \cdot MF' = 4a^2 \\
&\iff \quad MF \cdot MF' = c^2 - 2a^2 + x^2 + y^2 \\
&\Rightarrow \quad (MF \cdot MF')^2 = (c^2 - 2a^2 + x^2 + y^2)^2 \\
&\iff \quad (x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \cdot (x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = (c^2 - 2a^2 + x^2 + y^2)^2 \\
&\iff \quad (x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = (c^2 - 2a^2 + x^2 + y^2)^2 \\
&\iff \quad (x^2 + y^2 + c^2)^2 - (c^2 - 2a^2 + x^2 + y^2)^2 = 4c^2x^2 \\
&\iff \quad 2a^2 \cdot (2x^2 + 2y^2 + 2c^2 - 2a^2) = 4c^2x^2 \\
&\iff \quad a^2 \cdot (x^2 + y^2 + b^2) = c^2x^2 \iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \\
&\iff \quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1
\end{aligned}$$

Il reste à prouver que l'implication de la cinquième ligne est en fait une équivalence. Observons que, dans la quantité $c^2 - 2a^2 + x^2 + y^2$, $c^2$ et $x^2$ majorent $a^2$ ; donc cette quantité est positive, ce qui termine la preuve.

## Hyperbole : formulaire

$a$ est le demi-grand axe ; $b$ est le demi-petit axe ; $c$ est la demi-distance des foyers ; on a $c^2 = a^2 + b^2$ ; l'excentricité est $c/a$ ; les directrices ont pour équations $x = \pm a^2/c$. Les asymptotes ont pour équation $ay = \pm bx$. Une hyperbole est *équilatère* si ses asymptotes sont orthogonales ; ceci se produit lorsque $a = b$ ; dans ce cas, l'excentricité est $\sqrt{2}$. Le tableau ci-contre présente trois paramétrages.

| | | |
|---|---|---|
| $x = a\,\mathrm{ch}(t)$ | $y = b\,\mathrm{sh}(t)$ | $t \in \mathbb{R}$ |
| $x = a\dfrac{w^2+1}{2w}$ | $y = b\dfrac{w^2-1}{2w}$ | $w > 0$ |
| $x = \dfrac{a}{\cos(u)}$ | $y = b\tan(u)$ | $\lvert t\rvert < \pi/2$ |
| $x = a\dfrac{1+v^2}{1-v^2}$ | $y = \dfrac{2bv}{1-v^2}$ | $\lvert v\rvert < 1$ |

## Équations des directrices dans le repère canonique

Pour l'ellipse : $OA = a$, $OF = c$, $\frac{AF}{A\Omega}\frac{c}{a}$ ; donc $A\Omega = \frac{a}{c}AF = \frac{a(a-c)}{c}$, puis $O\Omega = OA + A\Omega = a + \frac{a(a-c)}{c} = \frac{a^2}{c}$.

Pour l'hyperbole : cette fois, $O\Omega = OA - A\Omega = a - \frac{a(c-a)}{c} = \frac{a^2}{c}$.

**FIN**