Exercices corrigés de combinatoire

Ceci est le premier jet d'un recueil d'exercices de combinatoire, presque tous corrigés. Il doit traîner pas mal de coquilles, n'hésitez pas à me les signaler !

Question 1 Donnez une expression simple de $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n} k\cdot k!$.

Solution *1* Un télescopage nous donne facilement le résultat : toute l'astuce consiste à écrire $k=(k+1)-1$; il vient, avec un changement d'indice à l'avant-dernière étape :

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k\leqslant n} k\cdot k! &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n}\big((k+1)-1\big)\cdot k! = \sum_{0\leqslant k\leqslant n}(k+1)k! - \sum_{0\leqslant k\leqslant n}k! = \sum_{0\leqslant k\leqslant n}(k+1)! - \sum_{0\leqslant k\leqslant n}k!\\ &= \sum_{1\leqslant k\leqslant n+1}k! - \sum_{0\leqslant k\leqslant n}k! = (n+1)!-1\end{aligned}$$

Remarque : si l'on manque d'idées, on peut «aller à la pêche», en regardant les premières valeurs, qui sont 0, 0, 1, 5, 23 et 119.

Question 2 Quel est le plus grand terme dans le développement de $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}3^k5^{n-k}$?

Solution *2* Pour $k\in[\![0,40]\!]$, notons $\alpha_k=\dbinom{40}{k}$. Pour $0\leqslant k\leqslant 39$, le rapport $\dfrac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}$ est égal à :

$$\frac{\binom{40}{k+1}3^{k+1}5^{39-k}}{\binom{40}{k}3^k5^{40-k}} = \frac{3}{5}\times\frac{k!(40-k)!}{(k+1)!(39-k)!} = \frac{3(40-k)}{5(k+1)}$$

Nous en déduisons $\dfrac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}-1=\dfrac{3(40-k)-5(k+1)}{5(k+1)}=\dfrac{115-8k}{5(k+1)}$.
Observons que $115-8k>0$ pour $k\leqslant 14$, et $115-8k<0$ pour $k\geqslant 15$. Il nous reste donc à comparer $\alpha_{15}=\dbinom{40}{15}3^{15}5^{25}$ et $\alpha_{14}=\dbinom{40}{14}3^{14}5^{26}$:

$$\frac{\alpha_{15}}{\alpha_{14}} = \frac{\binom{40}{15}\times 3^{15}\times 5^{25}}{\binom{40}{14}\times 3^{14}\times 5^{26}} = \frac{\dfrac{40!\times 3^{15}\times 5^{25}}{15!\times 25!}}{\dfrac{40!\times 3^{14}\times 5^{26}}{14!\times 26!}} = \frac{3^{15}\times 5^{25}\times 14!\times 26!}{3^{14}\times 5^{26}15!\times 25!} = \frac{3\times 26}{5\times 15} = \frac{78}{75} > 1$$

Donc $\alpha_{15}>\alpha_{14}$: le plus grand terme est α_{15}.

Question 3 Donnez une expression simple de $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n}k\binom{n}{k}$. Vous disposez d'au moins quatre méthodes différentes.

Solution *3* **Méthode 1** : pour $k\geqslant 1$, nous avons $k\dbinom{n}{k}=k\times\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=\dfrac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!((n-1-(k-1)}$
$n\dbinom{n-1}{k-1}$. Nous en déduisons, avec un changement d'indice : $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}k\binom{n}{k}=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}n\binom{n-1}{k-1}=n\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\binom{n-1}{k-1}=$
$\displaystyle n\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1}\binom{n-1}{k}=n2^{n-1}$.

Méthode 2 : En dérivant la relation $\displaystyle(1+x)^n=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}x^k$ nous obtenons $\displaystyle n(1+x^{n-1}=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$.

En remplaçant x par 1, il vient $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$. Bien entendu, la formule reste valide en démarrant la sommation à 0.

Méthode 3 : avec un changement d'indice, nous avons $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} k\binom{n}{k} = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} k\binom{n}{k} = \sum 0 \leqslant p \leqslant n(n-p)\binom{n}{n-p} = \sum 0 \leqslant p \leqslant n(n-p)\binom{n}{p} = \sum 0 \leqslant p \leqslant nn\binom{n}{p} - \sum 0 \leqslant p \leqslant np\binom{n}{p}$ donc $2\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k} = n\sum\limits_{0\leqslant p\leqslant n}\binom{n}{p} = n2^{n-1}$; finalement, nous obtenons $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} k\binom{n}{k} = 2^{n-1}$.

Méthode 4 : nous terminons par une méthode purement combinatoire (un double décompte). Plus précisément, nous allons compter de deux façons différentes le nombre de façons de choisir un couple (A, x) où A est une partie non vide de $[\![1, n]\!]$, et x un élément de A.
La première façon de procéder consiste à fixer $p \in [\![1, n]\!]$, puis à choisir une partie A non vide de $[\![1, n]\!]$, puis enfin à choisir $x \in A$; pour p fixé, il y a $p\binom{n}{p}$; le nombre total de choix est donc $\sum\limits_{1\leqslant p\leqslant n} p\binom{n}{p}$.
La deuxième façon consiste à choisir $x \in [\![1, n]\!]$, ce qui peut se faire de n façons différentes ; puis à compléter $\{x\}$ par une partie quelconque de $A - \{x\}$: ceci peut se faire de 2^{n-1} façons. Il y a au total $n2^{n-1}$ choix.
Nous concluons : $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Question 4 Donnez une expression simple de $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}^2$.

Solution 4 Nous proposons deux solutions différentes.
Méthode 1 : le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$ est $\binom{2n}{n}$. Mais $(1+x)^{2n} = \big((1+x)^n\big)^2 = \left(\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}x^k\right)^2$; donc ce coefficient est égal à $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}^2$.
Méthode 2 : soient A et B deux ensembles disjoints, de même taille n. Le nombre de n-parties de $A \cup B$ est $\binom{2n}{n}$. Mais, pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$, nous définissons une n-partie de $A \cup B$ en choisissant k éléments dans A et $n - k$ éléments dans B. En sommant les $n + 1$ termes de la forme $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$, nous obtenons $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Question 5 Donnez une expression simple de $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{(n-k)!(k+1)!}$.

Solution 5 Nous avons $\frac{1}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{1}{(n+1)!} \times \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{\binom{n+1}{k+1}}{(n+1)!}$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{(n-k)!(k+1)!} &= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{1\leqslant k\leqslant n+1}\binom{n+1}{k} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{0}\right) = \frac{2^{n+1}-1}{(n+1)!}\end{aligned}$$

Question 6 Donnez une expression simple de $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n}(-1)^k\binom{n}{k}$.

Solution 6 Nous proposons deux solutions différentes.
Méthode 1 : la formule du binôme nous donne $(1-x)^n = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n}(-x)^k\binom{n}{k}$. En remplaçant x par 1, il vient $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$, sauf pour $n = 0$: dans ce cas, la somme est égale à 1.

Question 7 Donnez une expression simple de $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n}(-1)^k k\binom{n}{k}$.

Solution *7* Reprenons l'idée de l'exercice précédent, qui consiste à dériver membre à membre la relation $(1-x)^n = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n}(-x)^k\binom{n}{k}$. Il vient $-n(1-x)^{n-1} = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n}-k(-x)^{k-1}\binom{n}{k}$. En remplaçant à nouveau x par 1, nous obtenons $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(-1)^k k\binom{n}{k} = 0$, sauf si $n=1$: dans ce cas, la somme est égale à 1.

Question 8 Donnez une expression simple de $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1}$.

Solution *8* **Méthode 1** : pour $k\geqslant 1$, nous avons la relation $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$; nous en déduisons $(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$, puis $\dfrac{\binom{n}{k}}{k+1} = \dfrac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1}$. Il vient :

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \sum_{0\leqslant k\leqslant n}\frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{0\leqslant k\leqslant n+1}\binom{n+1}{k}-1\right) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Question 9 Soit $p\in\mathbb{N}$. Montrez que la suite de terme général $\dfrac{\binom{n}{p}}{n^p}$ converge vers $\dfrac{1}{p!}$.

Solution *9* Nous avons $\dfrac{\binom{n}{p}}{n^p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!n^p} = \dfrac{1}{p!}\times\dfrac{n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1}{n^p} = \dfrac{1}{p!}\times\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n-2}{n}\cdots\dfrac{n-p+1}{n}$. Ce que nous pouvons écrire $\dfrac{\binom{n}{p}}{n^p} = \dfrac{1}{p!}\times\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\times\left(1-\dfrac{2}{n}\right)\times\cdots\left(1-\dfrac{p-1}{n}\right)$. Or, pour tout $k\in[\![1,p-1]\!]$, la quantité $1-\dfrac{k}{n}$ converge vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Les facteurs de ce type sont en nombre fini (à savoir $p-1$), donc leur produit converge vers 1. Concluons : $\dfrac{\binom{n}{p}}{n^p}\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{1}{p!}$.

Question 10 Donnez une expression simple de $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n}k(k-1)\binom{n}{k}$. Au moins deux méthodes sont envisageables.

Solution *10* Nous proposons trois solutions différentes.

Méthode 1 : observons que les termes d'indices 0 et 1 sont nuls. Pour $k\geqslant 2$, nous avons $k(k-1)\binom{n}{k} = \dfrac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-2)!(n-k)!} = n(n-1)\dfrac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$. Nous pouvons maintenant sommer ces termes ; il vient : $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n}k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\sum_{0\leqslant k\leqslant n-2}\binom{n-2}{k-2} = n(n-1)2^{n-2}$.

Méthode 2 : dérivons la relation $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}x^k$, il vient (en omettant le terme d'indice zéro) : $n(1+x)^{n-1} = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}k\binom{n}{k}x^{k-1}$; en dérivant une deuxième fois, nous obtenons $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \displaystyle\sum_{2\leqslant k\leqslant n}k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2}$. En remplaçant x par 1, nous obtenons $n(n-1)2^{n-2}$.

Méthode 3 : nous allons compter les triplets de la forme (x,y,A), où x et y sont deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$ et A est une partie de $[\![1,n]\!]$ contenant x et y. Fixons A, de taille au moins 2 ; choisissons dans A deux éléments x et y distincts ; le nombre de choix possibles est $\displaystyle\sum_{2\leqslant k\leqslant n}k(k-1)\binom{n}{k}$. Nous pouvons aussi fixer $x\in[\![1,n]\!]$, puis $y\in[\![1,n]\!]$ et distinct de x, puis une partie B de $[\![1,n]\!]$ ne contenant ni x, ni y. Nous vérifions facilement que ceci peut se faire de $n(n-1)2^{n-2}$ façons différentes.

Question 11 Donnez une expression simple de $S_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{k\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}$.

Solution ***11*** $S_n = \frac{k \cdot n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} = n-k+1$; donc $S_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (n-k+1)$. Avec le changement d'indice $k' = n-k+1$ il vient $S_n = \sum_{1 \leqslant k' \leqslant n} k' = \frac{n(n+1)}{2}$.

Question 12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminez $\min_{0 \leqslant k \leqslant n} k!(n-k)!$, puis $\max_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k}$.

Solution ***12*** Notons $\alpha_k = k!(n-k)!$; alors $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{k+1}{n-k}$ donc $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} - 1 = \frac{k+1-(n-k)}{n-k} = \frac{2k+1-n}{n-k}$. Distinguons deux cas de figure :

- $n = 2p+1$: alors $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{2(k-p)}{n-k}$ est strictement négatif pour $k < p$, nul pour $k = p$, et strictement positif pour $k > p$. Le minimum est donc atteint simultanement pour $k = p$ et $k = p+1$, et il est égal à $p!(p+1)!$.
- $n = 2p$: alors $\frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{2(k-p)+1}{n-k}$ est strictement négatif pour $k < p$, et strictement positif pour $k \geqslant p$. Donc le minimum est atteint lorsque $k = p$, et il est égal à $(p!)^2$.

Des résultats précédents, nous déduisons que $\max_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} = \frac{(2p+1)!}{p!(p+1)!}$ lorsque n est impair ; et que $\max_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} = \frac{(2p)!}{(p!)^2}$ lorsque n est pair.

Question 13 Pour n et k fixés, avec $1 \leqslant k \leqslant n$, résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - \binom{n}{k}x + \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k} = 0$.

Solution ***13*** Comme $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$, l'équation s'écrit $x^2 - \left(\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}\right) + \binom{n-1}{p}\binom{n-1}{p-1} = 0$. Les solutions sont manifestement $\binom{n-1}{p}$ et $\binom{n-1}{p-1}$.

Question 14 Soient n et p deux naturels, avec $0 < p \leqslant n$. Prouvez l'égalité $\sum_{0 \leqslant k \leqslant p} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 0$.

Solution ***14*** **À RÉDIGER !**

Question 15 Soient n et p deux naturels, avec $0 \leqslant p \leqslant n$. Prouvez l'égalité $\sum_{0 \leqslant k \leqslant p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p}$. Vous disposez d'au moins trois méthodes différentes.

Solution ***15*** **Méthode 1** : $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$, donc :

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant p} \binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{p} \sum_{0 \leqslant k \leqslant p} \binom{p}{k} = 2^p\binom{n}{p}$$

Méthode 2 : $2^p\binom{n}{p}$ est le coefficient de x^p dans le développement de $(1+2x)^n$; mais $(1+2x)^n = 1+x+x)^n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} x^k (1+x)^{n-k}$. Le coefficient de x^{p-k} dans le développement de $(1+x)^{n-k}$ est $\binom{n-k}{p-k}$; les termes d'indice $k > p$ dans la somme ont un degré supérieur à p, donc le coefficient de x^p est $\sum_{0 \leqslant k \leqslant p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

Méthode 3 : nous allons effectuer un double décompte. Plus précisément, nous allons compter de deux façons diférentes les couples (A, B) de parties de $[\![1, n]\!]$ telles que $A \subset B$ et $|B| = p$.
Une première façon consiste à choisir B, ceci de $\binom{n}{p}$ façons différentes ; puis à choisir A, de 2^p façons différentes. D'où un total de $2^p\binom{n}{p}$ façons.
Une deuxième façon de faire consiste à : fixer la taille $k \in [\![0, p]\!]$ de A ; puis choisir A, de $\binom{n}{k}$ façons ; puis choisir $B - A$, de $\binom{n-k}{p-k}$ façons. D'où un total de $\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ façons.

Nous en déduisons $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}=2^p\binom{n}{p}$.

Question 16 Pour $0\leqslant p\leqslant n$, donnez une expression simple de $S(n,p)=\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$. Donnez ensuite une expression simple de $T(n,p)=\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant p}k\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

Solution ***16*** Nous proposons deux solutions différentes.
Méthode 1 : dans $[\![1,n]\!]$, il y a $\binom{n}{p}$ p-parties. Or, pour k fixé dans $[\![0,p]\!]$, il y en a $\binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k}$ composées de k éléments pris dans $[\![1,p]\!]$, les autres étant pris dans $[\![p+1,n]\!]$.
Méthode 2 :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant k\leqslant p}k\binom{p}{k}\binom{n-p}{p-k} &= \sum_{1\leqslant k\leqslant p}p\binom{p-1}{k-1}\binom{n-p}{p-k}=p\sum_{0\leqslant k\leqslant p-1}\binom{p-1}{k}\binom{(n-1)-(p-1)}{p-1-k}\\ &= pS(n-1,p-1)=p\binom{n-1}{p-1}=p\times\frac{n(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}\\ &= \frac{p^2}{n}\times\frac{n!}{p!(n-p!}=\frac{p^2}{n}\times\binom{n}{p}\end{aligned}$$

Pour $p=0$, nous obtenons $T(n,0)=0$ donc la formule reste vraie au rang 0.

FIN