Techniques de calcul intégral

Table des matières

---

1 Intégrales de polynômes trigonométriques

Il s'agit de calculer $\displaystyle\int_a^b \sin^p(t)\cos^q(t)\,dt$; on procède comme suit :

- si p est pair et q impair, on effectue le changement de variable $u = \sin(t)$; exemple :
$$\int_0^{\pi/2} \sin^4(t)\cos(t)\,dt = \int_0^1 u^4\,du = 1/5$$
- si p est impair et q pair, on effectue le changement de variable $u = \cos(t)$; exemple :
$$\int_0^{\pi/3} \sin^3(t)\cos^4(t)\,dt = \int_0^{1/2} u^4(1-u^2)\,du = \Big[\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7}\Big]_0^{1/2} = \frac{1}{160} - \frac{1}{1296} = \frac{233}{4480}$$
- si p et q sont impairs, on effectue l'un ou l'autre des deux changements de variable précédent ; il est plus malin de le faire avec la fonction dont l'exposant est le plus petit ;
- si p et q sont pairs, on remplace $\sin^2(t)$ et $\cos^2(t)$ par leurs expressions en fonction de $\cos(2t)$, et on recommence.

2 Intégrales de fractions rationnelles

L'objectif de cette partie est d'expliquer comment calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{A(t)}{B(t)}\,dt$, où A et B sont deux polynômes *à coefficients réels.*

2.1 Fractions rationnelles

Définition : une *fraction rationnelle* est une expression de la forme $\frac{A}{B}$, où A et B sont deux polynômes, à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, avec $B \neq \mathbf{0}$.

Définition : une fraction rationnelle est *réduite* si le numérateur et le dénominateur n'ont aucun facteur commun ; ceci revient à dire qu'ils n'ont aucune racine commune.

Observons que le programme de PCSI comporte l'algorithme de la division euclidienne (qui va servir bientôt), mais pas celui du PGCD de deux polynômes.

Nous supposerons que B est factorisé (ou facilement factorisable), et qu'aucune de ses racines n'est racine de A. Ceci permet de nous placer dans la situation où la fraction est réduite.

Le polynôme B est scindé sur $\mathbb{C}$, mais il est à coefficients réels. Donc ses racines sont, soit réelles, soit complexes, deux à deux conjuguées. L'écriture générale de B est donc :

$$B = \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} (X - x_i)^{\alpha_i} \times \prod_{1 \leqslant j \leqslant s} (X^2 + v_j X + w_j)^{\beta_j}$$

où les x_j sont les racines réelles, et les polynômes $X^2 + v_j X + w_j$ «regroupent» les complexes, deux à deux conjuguées.

Un *pôle* de la fraction est une racine de son dénominateur.

La théorie de la *décomposition en éléments simples* sur $\mathbb{C}$ d'une fraction rationnelle énonce le résultat suivant : si la fraction $\frac{A}{B}$ est réduite, alors on peut écrire $\frac{A}{B} = Q + \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \sum_{1 \leqslant k \leqslant \alpha_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - z_i)^k}$, où :

- Q est la partie entière de F, c'est-à-dire le quotient dans la division euclidienne de A par B ;
- les z_i sont les pôles de F ;
- les λ_i sont les ordres de multiplicté des pôles.

L'expression $\sum_{1 \leqslant k \leqslant \alpha_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - z_i)^k}$ est la *partie polaire* relative au pôle z_i.

Définition : soit z_i un pôle de F. Le *résidu* relatif à z_i est le coefficient qui apparaît au numérateur dans la fraction $\frac{\lambda_{i,1}}{X - z_i}$.

En pratique, nous n'aurons affaire qu'à des fractions rationnelles dans lesquelles A et B sont à coefficients réels. Nous nous plaçons donc dans cette situation. La théorie nous dit que la fraction peut s'écrire :

$$\frac{A}{B} = R + \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \sum_{1 \leqslant k \leqslant \alpha_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - x_i)^k} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant \beta_j} \frac{\gamma_{j,k} X + \delta_{j,k}}{(X^2 + v_j X + w_j)^k}$$

dans laquelle :

- Q est la partie entière de F (cf. plus haut) ;
- les x_i sont les pôles réels de F ;
- les pôles complexes (s'il y en) sont deux à deux conjugués.

Définition : La *partie polaire* associée au pôle x_i, de degré α_i, est la quantité $\sum_{1 \leqslant k \leqslant \alpha_i} \frac{\lambda_{i,k}}{(X - x_i)^k}$.

Définition : La *partie polaire* associée au couple de pôles complexes conjugués z_j et $\overline{z_j}$, de même degré β_j, est la quantité $\sum_{1 \leqslant k \leqslant \beta_j} \frac{\gamma_{j,k} X + \delta_{j,k}}{(X^2 + v_j X + w_j)^k}$.

2.2 Calcul de l'intégrale

Soit à calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{A(t)}{B(t)}\,dt$, où A et B sont deux polynômes à coefficients réels, la fraction $\dfrac{A}{B}$ étant supposée réduite. La démarche à suivre est :

- effectuons la division euclidienne de A par B ; nous obtenons un quotient Q et un reste R ; le degré de ce dernier est strictement inférieur au degré de B ;
- nous avons alors $\displaystyle\int_a^b \frac{A(t)}{B(t)}\,dt = \int_a^b Q(t)\,dt + \int_a^b \frac{R(t)}{B(t)}\,dt$

Le calcul de la première intégrale est immédiat ; le polynôme Q est la *partie entière* de la fraction rationnelle.

2.3 Fraction sans élément simple de deuxième espèce

Nous calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{6t^2-t-1}{(t+1)(t+2)(t+4)}\,dt$. La fraction rationnelle associée est $\dfrac{6X^2-X-1}{(X+1)(X+2)(X+4)}$. La théorie nous dit que la décomposition en éléments simples de notre fraction s'écrit $\dfrac{a}{X+1}+\dfrac{b}{X+2}+\dfrac{b}{X+4}$.
La *méthode des coefficients indéterminés* consiste à multiplier les deux membres par $(X+1)(X+2)(X+3)$, puis à identifier les deux polynômes ainsi obtenus.
Une autre méthode consiste à calculer le résidu relatif à chaque pôle simple ; par exemple, le résidu relatif au pôle -1 est obtenu en multipliant les deux membres par $X+1$ et en évaluant en -1 ; il vient $a=2$. Nous obtenons de même $b=-25/2$ et $c=33/2$.

2.4 Fraction avec un pôle d'ordre élevé

Nous calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{2X+1}{(X+1)^3(X+2)}$. Nous pourrions procéer par identification, comme ci-dessus ; mais nous allons plutôt utiliser la *méthode du développement limité.* Multiplions la fraction par $(X+1)^3$, et notons $h = X+1$: nous obtenons $G(h) = \dfrac{2h-1}{h^3(h+1)}$. Calculons le développement limité de $h^3G(h)$, à l'ordre 2 et au voisinage de zéro :

$$h^3G(h) = \frac{-1+2h}{1+h} = (-1+2h)\big(1-h+h^2+o(h^2)\big) = -1+3h-3h^2+o(h^2)$$

La partie polaire relative au pôle -1 est donc $-\dfrac{1}{(X+1)^3}+\dfrac{3}{(X+1)^2}-\dfrac{3}{X+1}$. La partie polaire relative au pôle -2 s'obtient par identification : multiplier les deux membres par $X+2$, puis remplacer X par -2. Au final, l'intégrale vaut $\dfrac{9}{8}-6\ln(2)+3\ln(3)$.

2.5 Fraction avec un élément simple de deuxième espèce

Nous calculons $\displaystyle\int_0^1 \frac{3t-1}{(t+1)(t^2+1)}\,dt$. La théorie nous dit que la décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{3X-1}{(X+1)(X^2+1)}$ s'écrit $\dfrac{a}{X+1}+\dfrac{bX+c}{X^2+1}$. Multiplions les deux membres par $X+1$, et évaluons en -1 : il vient $a=-2$; multiplions les deux membres par x^2+1 et évaluons en i : il vient $b=2$ et $c=1$.

2.6 Quelques astuces pratiques

Si la fraction est paire (resp. impaire), le calcul s'en trouve simplifié.
Lorsque l'on utilise la méthode des coefficients indéterminés, il peut être intéressant d'observer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

3 Intégrales se ramenant à une I.P.P.

3.1 Rappel

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a,b]$. Alors $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$.
Oubliez définitivement les formules fumeuses qui traînent dans certains manuels de terminale.

3.2 Exemples

Exemple 1 : calculons $J = \displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\,dt$. Nous commençons par écrire cette intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{1}_{\uparrow}\underbrace{\arctan(t)}_{\downarrow}\,dt$.

Notons $u(t) = t$ et $v(t) = \arctan(t)$; ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui justifie le calcul suivant :

$$J = \big[t \times \arctan(t)\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \arctan(1) - \Big[\frac{\ln(1+t^2)}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$$

Exemple 2 : nous calculons $J = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{t}_{\downarrow}\underbrace{e^{2t}}_{\uparrow}\,dt$. Notons $u(t) = t$ et $v(t) = \dfrac{e^{2t}}{2}$; ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui justifie le calcul suivant :

$$J = \Big[t \times \frac{e^{2t}}{2}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2t}}{2}\,dt = \frac{e^2}{2} - \Big[\frac{e^{2t}}{4}\Big]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

3.3 Intégrale du produit d'un polynôme et d'une exponentielle

Ce sujet a été abordé lors de l'étude des suites récurrentes linéaires du deuxième ordre ; il relève également de l'algèbre linéaire.

Soient P un polynôme de degré n et $\alpha \in \mathbb{R}^*$; nous voulons calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b P(t)e^{\alpha t}\,dt$. Il suffit d'exhiber un polynôme Q tel que $\dfrac{d}{dt}\Big(Q(t)e^{\alpha t}\Big) = P(t)e^{\alpha t}$; il est clair que ce polynôme doit être de degré n *exactement*.
La méthode des coefficients indéterminés s'applique aisément.
La méthode s'étend au cas du produit d'un polynôme à coefficient complexe et d'une exponentielle $e^{\alpha t}$ avec α complexe.

3.4 Exercices

Calculez les intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^t \sin(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^t \cos(t)\,dt$. Indication : effectuez *deux* IPP successives, et évitez de tourner en rond. Réponses : $\dfrac{e^{\pi/2}+1}{2}$ et $\dfrac{e^{\pi/2}-1}{2}$

Calculez l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt$. Réponse : $3\ln(2) - \frac{3\ln(3}{2}$.

Avec le changement de variable $u = \pi - t$, calculez l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt$. Réponse : $\pi^2/4$.

Calculez l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dt$. Réponse : $1 - \pi/4$.

4 Calculs de primitives

Exemple 1 : explicitons une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + 2e^{-x}}$. Multiplions haut et bas par e^x, il vient $J = \displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+2}\,dx$. Avec le changement de variable $u = e^x$, nous obtenons :

$$J = \int \frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\Big(\frac{u}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\Big(\frac{e^x}{\sqrt{2}}\Big)$$

Exemple 2 : explicitons une primitive de $x \mapsto \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}}$. Observons que cette fonction est définie sur $]-\infty, 2[\cup]3, +\infty[$. La quantité sous le radical est $x^2-5x+6 = (x-5/2)^2 - 1/4$, ce qui incite à poser $t = 2x-5$. Alors

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-5x+6}} = \int \frac{(t+9)/2}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \sqrt{x^2-5x+6} + \frac{9}{2}\ln\left|2x-5+2\sqrt{x^2-5x+6}\right|$$

Exemple 3 : explicitons une primitive de $x \mapsto \sqrt{e^x-1}$. Nous effectuons le changement de variable $t = \sqrt{e^x-1} \iff e^x = t^2+1$, avec $t \geqslant 0$ et $2t\,dt = e^x\,dx \iff \dfrac{2t\,dt}{1+t^2} = dx$. Il vient :

$$\begin{aligned}\int \sqrt{e^x-1}\,dx &= \int t\frac{2t}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2(t^2+1))-2}{1+t^2}\,dt \\ &= 2t - 2\arctan(t) + K = 2\sqrt{e^x-1} - 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) + K\end{aligned}$$

5 Maple

Pour décomposer une fraction rationnelle en éléments simples, Maple propose l'option `parfrac` de la fonction `convert` ; exemple :

```
F := (6*X^2-X-1)/(X+1)/(X+2)/(X+4);
convert(F,parfrac,X);
```

Le résultat affiché est :

$$\frac{2}{X+1} - \frac{25}{2}\frac{1}{X+2} + \frac{33}{2}\frac{1}{X+}$$

Le troisième argument `X` est indispensable : pensez au cas où la fraction comporte une indéterminée (disons `X`) et un paramètre (disons `a`).

FIN