Sup PCSI 2 — Colles n° 25 et 26 — Quinzaine du 3/5 au 14/5

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Polynômes

La notion de $\mathbb{K}$-algèbre n'est pas au programme !

• Définition d'un polynôme sur $\mathbb{K}$: c'est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$, nulle APCR. Notation $\mathbb{K}[X]$, structure de $\mathbb{K}$-e.v.

• ▶ Degré d'un polynôme ; coefficient dominant d'un polynôme non nul, polynômes unitaires. Degré d'une somme, condition suffisante pour l'égalité. Notation $\mathbb{K}_n[X]$; $\mathbb{K}_n[X]$ est un s.e.v. de $\mathbb{K}[X]$.

• ▶ Base canonique et dimension de $\mathbb{K}_n[X]$; toute famille de polynômes à degrés échelonnés de 0 à n est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

• $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie. **ATTENTION** : la notion de base de $\mathbb{K}[X]$ n'a pas été vue.

• Définition du produit ; degré du produit ; $\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif et intègre.

• Polynômes constants ; identification entre ces polynômes et les éléments de $\mathbb{K}$.

• Polynôme X défini par $X_n = \delta_{n,1}$. Formule $X^n X^p = X^{n+p}$. Notation $[X^n]P$ pour le coefficient de X^n dans P.

• ▶ Division euclidienne : existence et unicité du quotient et du reste ; algorithme de la division euclidienne. Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$.

• Fonction polynôme $\widetilde{P}$ associée au polynôme P. Calcul du reste dans la division euclidienne par $X - a$. Extension de la notion de fonction polynôme.

• Racines d'un polynôme. a est racine de P ssi P est divisble par $X - a$. Un polynôme de degré au plus n possédant au moins $n + 1$ racines est nécessairement le polynôme nul. On peut identifier un polynôme et la fonction polynôme associée. Ordre de multiplicité d'une racine, racines multiples.

• Interpolation de Lagrange.

• Dérivation des polynômes : définition, propriétés.

• Dérivées successives ; dérivée p-ième de X^n. Formule de Leibniz.

• Formule de Taylor pour les polynôme (énoncé et preuve non exigibles). Relation entre l'ordre de multiplicité d'une racine de P, et racines des polynômes dérivés de P (preuve non exigible).

• Polynômes irréductibles. Décomposition en produit de facteurs irréductibles : l'existence est expliquée, l'unicité est admise.

• Description des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.

• Notion d'équation algébrique. Polynômes scindés sur un corps $\mathbb{K}$: exemples.

▶ Les étudiant(e)s doivent savoir étudier en détail un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ défini au moyen de compositions, produits par des polynômes fixés, dérivation ; exemple : $\Phi : P \mapsto P(X+1) + 2XP'$. En particulier, les compétences suivantes sont exigibles : discussion de l'injectivité et de la surjectivité ; dans le cas où Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{K}_n[X]$, détermination de la matrice de Φ_n dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

2 Et aussi…

Cette quinzaine encore, n'hésitez pas à poser un petit calcul : par exemple, l'orthonormalisation d'une base de $\mathbb{R}^3$, ou d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Prochain programme de colle : courbes paramétrées