Sup PCSI 2 — Colles n° 23 et 24 — Quinzaine du 5/4 au 16/4

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Algèbre bilinéaire

• Définition d'un produit scalaire ; exemples : produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$; $(f,g) \mapsto \int_{[0,1]} fg$, dans $\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Notations $u \cdot v$, $(u \mid v)$ et $\langle u \mid v\rangle$. Norme euclidienne ; identités de polarisation.

• ▶ Inégalité de Cauchy-Schwarz ; le cas d'égalité est exigible. Inégalité triangulaire.

• Vecteurs unitaires, vecteurs orthogonaux. Familles orthogonales, orthonormales ; relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie. Toute famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux est libre.

• Définition d'un espace euclidien.

• Existence de bases orthonormales : une preuve par récurrence a été donnée et peut être exigée. La méthode de Schmidt est au programme.

• Expression de la norme et du produit scalaire dans une b.o.n.

• Orthogonal d'une partie d'un espace euclidien ; sous-espaces vectoriels orthogonaux.

• L'orthogonal d'un s.e.v. F d'un espace euclidien est un supplémentaire de F, note $F^{\perp}$, et appelé supplémentaire orthogonal de F. Toute forme linéaire f s'écrit d'une manière et d'une seule $f : x \mapsto (a|x)$ où a est un vecteur.

• Définition d'un endomorphisme orthogonal (conservant le produit scalaire). Caractérisation par la conservation de la norme, puis par l'image d'une (de toute) base orthonormée.

• Définition du groupe orthogonal $GO(E)$. Symétries orthogonales, réflexions.

• ▶ Définition des matrices orthogonales et du groupe $O(n)$. Caractérisation des matrices orthogonales par la relation $M \times M^T = M^T \times M = I_n$.

• ▶ Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales, réflexions. Expression de la projection orthogonale d'un vecteur sur une droite ou un plan de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$; calcul de la matrice d'une telle projection orthogonale, ou d'une symétrie orthogonale, dans une base orthonormée.

2 Et aussi...

Cette quinzaine encore, n'hésitez pas à demander le calcul du rang d'une matrice, ou celui de son inverse, ou le calcul de la puissance n-ième...

Prochain programme de colle : polynômes