

Les points marqués d'un \bullet peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un \blacktriangleright se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Algèbre bilinéaire

- Définition d'un produit scalaire ; exemples : produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n ; $(f, g) \mapsto \int_{[0,1]} fg$, dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Notations $u \cdot v$, $(u | v)$ et $\langle u | v \rangle$. Norme euclidienne ; identités de polarisation.
- \blacktriangleright Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ ; le cas d'égalité est exigible. Inégalité triangulaire.
- Vecteurs unitaires, vecteurs orthogonaux. Familles orthogonales, orthonormales ; relation de PYTHAGORE pour une famille orthogonale finie. Toute famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux est libre.
- Définition d'un espace euclidien.
- Existence de bases orthonormales : une preuve par récurrence a été donnée et peut être exigée. La méthode de SCHMIDT est au programme.
- Expression de la norme et du produit scalaire dans une b.o.n.
- Orthogonal d'une partie d'un espace euclidien ; sous-espaces vectoriels orthogonaux.
- L'orthogonal d'un s.e.v. F d'un espace euclidien est un supplémentaire de F , note F^\perp , et appelé supplémentaire orthogonal de F . Toute forme linéaire f s'écrit d'une manière et d'une seule $f : x \mapsto (a|x)$ où a est un vecteur.
- Définition d'un endomorphisme orthogonal (conservant le produit scalaire). Caractérisation par la conservation de la norme, puis par l'image d'une (de toute) base orthonormée.
- Définition du groupe orthogonal $GO(E)$. Symétries orthogonales, réflexions.
- \blacktriangleright Définition des matrices orthogonales et du groupe $O(n)$. Caractérisation des matrices orthogonales par la relation $M \times M^T = M^T \times M = I_n$.
- \blacktriangleright Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales, réflexions. Expression de la projection orthogonale d'un vecteur sur une droite ou un plan de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 ; calcul de la matrice d'une telle projection orthogonale, ou d'une symétrie orthogonale, dans une base orthonormée.

2 Et aussi...

Cette quinzaine encore, n'hésitez pas à demander le calcul du rang d'une matrice, ou celui de son inverse, ou le calcul de la puissance n -ième...

Prochain programme de colle : polynômes