Sup PCSI 2 — Colles n° 21 et 22 — Quinzaine du 22/3/2010 au 2/4/2010

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Révision

Tout ce qui est calcul : limites, équivalents, développements limités, intégrales…

2 Calcul matriciel

E et F sont deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie.

• Matrice, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, de $u \in \mathcal{L}(E,F)$, dans des bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F. Définition de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

• Somme de matrices, produit d'une matrice par un scalaire. La fonction $u \in \mathcal{L}(E,F) \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-e.v.

• Définition de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\Omega_{i,j}$ est la matrice définie par $(\Omega_{i,j})_{\ell,k} = \delta_{i,\ell}\delta_{j,k}$. Dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.

• Matrice, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans une base $\mathcal{B}$ de E.

• Produit de deux matrices ; associativité du produit matriciel. La fonction $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme d'anneaux.

• Expression du produit $\Omega_{i,j}\Omega_{\ell,k}$. Por , $\geqslant 2$, l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est ni commutatif, ni intègre.

• Matrices inversibles ; elles forment un groupe multiplicatif noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Isomorphisme entre $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{GL}(\mathbb{K}^n)$.

• Une matrice est inversible ssi elle est la matrice d'un isomorphisme ; ssi elle possède une inverse à gauche ; ssi elle possède une inverse à droite.

• Transposition ; matrices symétriques, anti-symétriques.

• Matrices triangulaires supérieures : elles forment un sous-anneau et un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Matrices triangulaires supérieures à diagonale unité : elles forment un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$; la preuve n'est pas exigible.

• Matrices diagonales ; CNS d'inversibilité.

• Opérations élémentaires, notées $\mathcal{L}_i \leftarrow \alpha\mathcal{L}_i$, $\mathcal{L}_i \leftrightarrow \mathcal{L}_j$ et $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i - \alpha\mathcal{L}_j$; interprétation en termes de produits à gauche par des matrices élémentaires ; celles-ci sont explicitées dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• ▶ Algorithme de calcul de l'inverse d'une matrice carrée, par la méthode des opérations élémentaires ; mise en œuvre de cet algorithme.

• Matrice, dans une base $\mathcal{B}$ d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, d'une famille finie $(v_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ de p vecteurs de cet espace.

• Matrice de passage $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{C}$; c'est la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$. C'est aussi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(Id_E)$.

• ▶ Effet d'un changement de base(s) sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme.

• Rang d'une matrice. $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r ssi il existe U et V inversibles telles que $A = UJ^{<n,p,r>}V$. Invariance du rang par transposition.

• ▶ Calcul pratique du rang d'une matrice.

• ▶ Trace d'une matrice carrée ; $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.