

Les points marqués d'un \bullet peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un \blacktriangleright se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Hors d'œuvre

Cette quinzaine encore, n'hésitez pas à demander la simplification d'une somme, le calcul d'un développement limité, d'une intégrale, d'une limite, d'un équivalent...

2 Algèbre linéaire : dimension finie

- S.e.v. engendré par une famille $\mathcal{V} = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs d'un \mathbb{K} -e.v. E : c'est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de \mathcal{V} . C'est aussi le plus petit s.e.v. de E contenant \mathcal{V} . Notation $\text{Vect}(\mathcal{V})$.
- ▶ • Dépendance et indépendance linéaire ; familles libres, familles liées. Remarque : les familles considérées sont finies.
- Familles génératrices. Espaces de dimension finie. Exemples de tels espaces ; exemples d'espaces qui ne sont pas de dimension finie.
- Une famille libre le reste si on lui enlève des vecteurs ; une famille génératrice le reste si on lui ajoute des vecteurs.
- $p + 1$ combinaisons linéaires de p vecteurs sont liées.
- Définition d'une base d'un \mathbb{K} -e.v. E de dimension finie ; existence d'une base. Toutes les bases de E ont le même cardinal, appelé dimension de E .
- Base canonique de \mathbb{K}^n .
- Dans un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie n , une famille libre (ou génératrice) de n vecteurs est une base.
- Dimension d'un s.e.v. : elle est au plus égale à la dimension de l'espace ; l'égalité a lieu ssi le s.e.v. est l'espace entier. Théorème dit « de la base incomplète ». Existence de supplémentaires d'un s.e.v. d'un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie. Caractérisations des supplémentaires avec la dimension.
- Relations $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$ et $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.
- Lorsque E et F sont de dimension finie : construction d'une base de $E \times F$, lorsque l'on connaît des bases de E et F ; relation $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.
- Une application linéaire partant d'un espace E de dimension finie est parfaitement définie par l'image d'une base de E .
- Une application linéaire est injective ssi elle conserve la notion de famille libre.
- Une application linéaire partant d'un espace de dimension finie est surjective ssi elle conserve la notion de famille génératrice.
- Si E est de dimension finie, toute application linéaire f de E dans F induit un isomorphisme d'un supplémentaire de $\ker(f)$ sur $\text{im}(f)$.
- Théorème du rang.
- Pour une application linéaire f de E dans F , de même dimension finie n , équivalence entre : (i) f est bijective ; (ii) f est injective ; (iii) f est surjective ; (iv) $\ker(f) = \{\vec{0}\}$; (v) $\text{rg}(f) = n$; (vi) f possède une inverse à gauche ; (vii) f possède une inverse à droite.
- Deux \mathbb{K} -e.v. de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension.
- ▶ • Existence et unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base donnée d'un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie.
- ▶ Expression analytique d'une projection ou d'une symétrie, dans le cas où l'espace est \mathbb{R}^3 .
- ▶ Familles libres, familles liées : posez systématiquement une question. La famille peut être composée de vecteurs de \mathbb{R}^n , ou encore de fonctions...