Sup PCSI 2 — Colles n° 17 et 18 — Quinzaine du 8/2/2010 au 19/2/2010

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Espaces vectoriels

• Définition d'un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$; exemples. Règles de calculs dans un $\mathbb{K}$-e.v.

• Espace vectoriel produit de deux $\mathbb{K}$-e.v.

La notion de $\mathbb{K}$-algèbre n'est plus au programme.

• Sous-espaces vectoriels : définition, exemples, caractérisation. S.e.v. nul ; droites vectorielles.

• Intersection de s.e.v.

• Somme de deux s.e.v. Sous-espaces en somme directe, notation $F \oplus G$. S.e.v. supplémentaires, notation $E = F \oplus G$.

• Applications linéaires : définition, exemples, caractérisation. Vocabulaire : endomorphismes, isomorphismes, automorphismes. Notations $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$.

• Noyau et image d'une application linéaire ; ce sont des s.e.v. Plus généralement, l'image directe et l'image réciproque d'un s.e.v. sont elles-mêmes des s.e.v.

• $\mathcal{L}(E, F)$ possède une structure naturelle de $\mathbb{K}$-e.v.

• Composée de deux applications linéaires. $\mathcal{L}(E)$ possède une structure naturelle d'anneau. **Remarque** : la structure de $\mathbb{K}$-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ n'est plus au programme.

• Sous-espace stable par un endomorphisme ; endomorphisme induit.

• Bijection réciproque d'un isomorphisme ; $\mathcal{GL}(E)$ possède une structure naturelle de groupe.

▶ • Projecteurs : définition, $\ker(p)$ et $\operatorname{im}(p)$ sont supplémentaires. Projections ; équivalence entre projections et projecteurs.

• Endomorphismes involutifs, symétries.

• Combinaisons linéaires. Caractérisation des sous-espaces et des applications linéaires au moyen de cette notion.

▶Familles libres, familles liées : posez systématiquement une question. La famille peut être composée de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, ou encore de fonctions…

2 Et aussi…

Cette quinzaine encore, n'hésitez pas à demander la simplification d'une somme, le calcul d'un développement limité, d'une intégrale, d'une limite, d'un équivalent…

La théorie des espaces de dimension finie sera au prochain programme de colle.