Sup PCSI 2 — Colles n° 15 et 16 — Quinzaine du 25/1/2010 au 5/1/2010

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

▶Tout ce qui est calculs.

1 Développements limités

• Définition du $DL_n(a)$ d'une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$, où $a \in I$. Exemple : $DL_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

• Lien entre le $DLn(a)$ de f et le $DL_n(0)$ de $h \mapsto f(a+h)$. Restriction, troncature.

• Si $a \in I$, l'existence du $DL_0(a)$ équivaut à la continuité de f en a ; l'existence du $DL_1(a)$ équivaut à la dérivabilité de f en a.

• Unicité du $DL_n(0)$; conséquence pour le $DL_n(0)$ d'une fonction paire ou impaire.

• Sommes et produits de $DL_n(0)$.

• Intégration de $DL_n(0)$. Obtention des $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \ln(1-x)$, arctan.

• Formule de Taylor-Young (énoncé). Obtention de $DL_n(0)$ à partir de cette formule : $DL_n(0)$ de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

• Les étudiants connaissent plusieurs méthodes pour obtenir le $DL_5(0)$ de tan.

• Exemples de développements limités généralisés, et de développements limités au voisinage de $+\infty$.

2 Étude pratique des fonctions numériques

▶ Toute l'étude pratique, en particulier : comportement aux bornes de chacun des intervalles qui constituent l'ensemble de définition, prolongement par continuité, branches infinies, détermination d'asymptotes au moyen de développements limités (éventuellement au voisinage de $\pm\infty$), étude des variations, étude locale aux points d'arrêt (avec utilisation au besoin du « théorème de la limite de la dérivée »), tracé de la courbe représentative.

3 Fonctions convexes

• ▶ Brefs rappels sur la notion de barycentre de deux points. Définition du segment $[A, B]$. Définition d'une partie convexe du plan ; exemples de parties convexes.

• Définition d'une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$: l'ensemble des points situés au-dessus de la courbe représentative est convexe. Exemples : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$.

• Une fonction est convexe ssi sa courbe représentative est située « sous ses cordes ».

• ▶ Caractérisation des fonctions convexes par l'inégalité de convexité $f\big((1-\lambda)x+\lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$. Équivalence avec l'inégalité à n points.

• Caractérisation des fonctions convexes dérivables, puis deux fois dérivables (démonstration non exigible). La continuité et la dérivabilité à droite et à gauche en tout point intérieur à I ont été prouvées, mais ne sont pas exigibles.

▶ Démonstration d'inégalités en faisant appel à des fonctions convexes.