Sup PCSI 2 — Colles n° 13 et 14 — Quinzaine du 11/1/2010 au 22/1/2010

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Anneaux et corps

• Anneaux : définition, exemples. Règles de calcul dans un anneau.

• Sous-anneaux. Morphismes d'anneaux.

• Formule de Bernoulli et formule du binôme pour deux éléments qui commutent.

• Corps : définition, exemples ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$). Sous-corps. Morphismes de corps.

2 Dérivées

• Définitions équivalentes de la dérivée en $a \in I$ de $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$: avec la limite du taux d'acroissement, avec le $DL_1(a)$ (la notion de DL n'est pas à ce programme).

• La dérivabilité de f en a implique la continuité de f en a. La réciproque est fausse.

• Fonction dérivée.

• Dérivée de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions dérivables. Formule de Leibniz.

• Dérivée de la composée de deux fonctions dérivables.

• Condition pour que f^{-1} soit dérivable, expression de $\left(f^{-1}\right)'$.

• Théorème de Rolle (preuve non exigible) ; nécessité de chaque hypothèse.

• Théorème des accroissements finis (preuve non exigible) ; inégalité des accroissements finis.

• Théorème dit *de la limite de la dérivée* (preuve non exigible).

• Lien entre sens de variation de f et signe de f' ; en particulier, CNS pour que $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ soit strictement monotone sur I.

• Extremums locaux ; en un extremum local d'une fonction dérivable, la dérivée s'annule.

• Fonctions lipschitziennes. Une fonction f dérivable est k-lipschitzienne ssi $|f'|$ est bornée par k.

3 Étude pratique des fonctions numériques

▶ Toute l'étude pratique, en particulier : comportement aux bornes de chacun des intervalles qui constituent l'ensemble de définition, prolongement par continuité, branches infinies, détermination d'asymptotes au moyen de développements limités (éventuellement au voisinage de $\pm\infty$), étude des variations, étude locale aux points d'arrêt (avec utilisation au besoin du « théorème de la limite de la dérivée »), tracé de la courbe représentative.