

Les points marqués d'un \bullet peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un \blacktriangleright se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Suites : généralités

- Définition d'une suite à valeurs dans E : c'est une fonction de \mathbb{N} vers E . Extension : suites définies APCR. Image d'une suite.
- Exemples de modes de définition : explicite ; récurrence du premier ordre (lien avec l'itération d'une fonction) ; récurrence du deuxième ordre ; récurrence complète ; implicite.
- Vocabulaire général : suites bornées ; suite nulle, suites constantes, suites périodiques.
- Vocabulaire spécifique aux suites de réels : suites croissantes, décroissantes, monotones, majorées, minorées. Comparaison de deux suites au moyen de \leq .
- Opérations sur les suites de réels : somme, produit par λ , produit, quotient.

2 Convergence et limite

- Définition de la convergence d'une suite vers ℓ . Exemples : $1/n$, 2^{-n} ; contre-exemple : $(-1)^n$.
- Unicité de la limite d'une suite convergente.
- u converge vers 0 ssi $|u|$ converge vers 0.
- Toute suite convergente est bornée. Contre-exemple pour la réciproque.
- Si u converge vers 0 et si v est bornée, alors uv converge vers 0.
- Somme, produit par λ , produit, de suites convergentes. Condition pour que la suite de terme général $1/u_n$ existe ; si cette condition est vérifiée, et si (u_n) converge vers $\ell \neq 0$, alors la suite $(1/u_n)$ converge vers $1/\ell$.

3 Suites extraites

- Notion de suite extraite. Une suite converge ssi toutes ses suites extraites convergent.
- Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite ℓ , alors (u_n) converge également vers ℓ .
- Utilisation de suites extraites pour établir la divergence d'une suite.

4 Résultats spécifiques aux suites de réels

- Si $|u| < v$ et si v converge vers 0, alors u converge vers 0. Théorème des trois suites.
- Si une suite converge vers $\ell > 0$, alors ses termes majorent $\ell/2$ APCR.
- La limite d'une suite convergente de réels positifs est positive (au sens large).
- Théorème admis (de la limite monotone) : toute suite croissante et majorée de réels converge ; sa limite est la borne supérieure de son image.
- \blacktriangleright Suites adjacentes : définition ; deux suites adjacentes convergent vers une même limite. Exemple : série harmonique alternée.
- Définition de la divergence d'une suite de réels vers $+\infty$. Pour une suite croissante : ou bien elle est majorée (auquel cas elle converge), ou bien elle n'est pas majorée (auquel cas elle diverge vers $+\infty$).

5 Relations de comparaison

- Notion de suite u négligeable devant une suite v , notation $u_n = o(v_n)$, exemples, compatibilité avec les opérations.
- Toute suite (u_n) de réels strictement positifs vérifiant $u_{n+1} \leq k u_n$ APCR avec $k < 1$ converge vers 0.
- Comparaison des suites de termes généraux respectifs $(\ln(n))^\alpha$ ($\alpha > 0$), n^β ($\beta > 0$), γ^n ($\gamma > 1$) et $n!$.
- Notion de suites équivalentes, notation $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$, exemples, compatibilité avec les opérations. Lien entre cette notion et la précédente. Énumération d'équivalents usuels ; pour la plupart des preuves, on se ramène à des calculs de dérivées.
- Notation $u_n = \mathcal{O}(v_n)$: exemples, quelques propriétés.
- \blacktriangleright Notion de développement asymptotique ; exemple : obtention de $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.