Sup PCSI 2 — Colles n° 5 et 6 — Quinzaine du 19/10 au 13/11

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Opérateurs $\sum$ et $\prod$

▶ Manipulation des opérateurs $\sum$ et $\prod$: propriétés algébriques, changement d'indices, télescopage.

• Calcul de $S_n^p = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k^p$, pour $p \in [\![1,3]\!]$.

▶ Permutation des opérateurs dans le cas de sommes « doubles ».

• Formule de Bernoulli : $a^n - b^n = (a-b) \sum_{0 \leqslant k < n} a^k b^{n-1-k}$.

• Simplification de $\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \cos(kx)$ et $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sin(kx)$.

• Formule du binôme : preuve par récurrence.

2 Combinatoire

• Notation $|X|$ pour le cardinal d'un ensemble X fini. Cardinal de $E \cup F$, $E \times F$, F^E. Nombre d'injections de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$; nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$. Nombre de k-parties d'un ensemble à n éléments ; cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

▶ Dénombrements divers, manipulation de sommes faisant intervenir des coefficients binomiaux.

▶ Méthode du double décompte pour établir des identités.

3 Intégration

• La notion de fonction continue a été définie sans recours à la notion de limite : on a simplement énuméré une famille de fonctions continues « de base », et donné des règles permettant de prouver qu'une fonction est continue (somme, produit, quotient, composée).

• Les fonctions dérivables sont continues. Notations $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.

• Définition des primitives d'une fonction sur un intervalle I. On admet que toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives sur cet intervalle. On montre que la différence entre deux primitives de f sur I est constante.

L'intégrale sur $[a,b]$ d'une fonction continue f est définie comme la variation sur $[a,b]$ d'une primitive de f sur cet intervalle ; cette variation ne dépend pas de la primitive choisie.

• L'intégrale ainsi définie est linéaire et positive.

• Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,dt$ aux cas $a=b$, puis $a>b$. Relation de Chasles.

• Si $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}^+\big)$ vérifie $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, alors $f=0$ (sous réserve que $a<b$).

• Inégalité $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b \big|f(t)\big|\,dt$. Si $a<b$, on a l'égalité ssi f est de signe constant.

• Inégalité de Cauchy-Schwarz ; le cas d'égalité a été vu, et est exigible.

• Formule d'intégration par parties. Les étudiants doivent **IMPÉRATIVEMENT**, lors de son application, exhiber deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

• Formule de Taylor avec reste intégral.

• Inégalité de Taylor-Lagrange.

▶ Calculs pratiques, en particulier : intégration par parties.

• Partage d'un intervalle. Sommes de Riemann. Si $f \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, convergence (non exigible) de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$ vers $\int_0^1 f(t)\,dt$.

▶ Applications à des calculs de limites.

• ▶ Changement de variable.