

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ► se prêtent particulièrement à des exercices.

## 1 Opérateurs $\sum$ et $\prod$

- Manipulation des opérateurs  $\sum$  et  $\prod$  : propriétés algébriques, changement d'indices, télescopage.
- Calcul de  $S_n^p = \sum_{1 \leq k \leq n} k^p$ , pour  $p \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ .
- Permutation des opérateurs dans le cas de sommes « doubles ».
- Formule de BERNOULLI :  $a^n - b^n = (a - b) \sum_{0 \leq k < n} a^k b^{n-1-k}$ .
- Simplification de  $\sum_{0 \leq k \leq n} \cos(kx)$  et  $\sum_{1 \leq k \leq n} \sin(kx)$ .
- Formule du binôme : preuve par récurrence.

## 2 Combinatoire

- Notation  $|X|$  pour le cardinal d'un ensemble  $X$  fini. Cardinal de  $E \cup F$ ,  $E \times F$ ,  $F^E$ . Nombre d'injections de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ; nombre de permutations de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Nombre de  $k$ -parties d'un ensemble à  $n$  éléments ; cardinal de  $\mathcal{P}(E)$ .
- Dénombrements divers, manipulation de sommes faisant intervenir des coefficients binomiaux.
- Méthode du double décompte pour établir des identités.

## 3 Intégration

- La notion de fonction continue a été définie sans recours à la notion de limite : on a simplement énuméré une famille de fonctions continues « de base », et donné des règles permettant de prouver qu'une fonction est continue (somme, produit, quotient, composée).
- Les fonctions dérivables sont continues. Notations  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  et  $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ .
- Définition des primitives d'une fonction sur un intervalle  $I$ . On admet que toute fonction continue sur un intervalle  $I$  possède des primitives sur cet intervalle. On montre que la différence entre deux primitives de  $f$  sur  $I$  est constante.
- L'intégrale sur  $[a, b]$  d'une fonction continue  $f$  est définie comme la variation sur  $[a, b]$  d'une primitive de  $f$  sur cet intervalle ; cette variation ne dépend pas de la primitive choisie.
- L'intégrale ainsi définie est linéaire et positive.
- Extension de la notation  $\int_a^b f(t) dt$  aux cas  $a = b$ , puis  $a > b$ . Relation de CHASLES.
- Si  $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^+)$  vérifie  $\int_a^b f(t) dt = 0$ , alors  $f = 0$  (sous réserve que  $a < b$ ).
- Inégalité  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$ . Si  $a < b$ , on a l'égalité ssi  $f$  est de signe constant.
- Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ ; le cas d'égalité a été vu, et est exigible.
- Formule d'intégration par parties. Les étudiants doivent **IMPÉRATIVEMENT**, lors de son application, exhiber deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .
- Formule de TAYLOR avec reste intégral.
- Inégalité de TAYLOR-LAGRANGE.
- Calculs pratiques, en particulier : intégration par parties.
- Partage d'un intervalle. Sommes de RIEMANN. Si  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , convergence (non exigible) de  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$  vers  $\int_0^1 f(t) dt$ .
- Applications à des calculs de limites.
- ► Changement de variable.