Sup PCSI 2 — Colle n° 21 et 22 — Quinzaine du 17/3 au 28/3

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Calcul matriciel

E et F sont deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie.

• Matrice, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$, de $u \in \mathcal{L}(E, F)$, dans des bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F. Définition de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

• Somme de matrices, produit d'une matrice par un scalaire. La fonction $u \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-e.v.

• Définition de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\Omega_{i,j}$ est la matrice définie par $(\Omega_{i,j})_{\ell,k} = \delta_{i,\ell}\delta_{j,k}$. Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.

• Matrice, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans une base $\mathcal{B}$ de E.

• Produit de deux matrices ; associativité du produit matriciel. La fonction $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme d'anneaux.

• Expression du produit $\Omega_{i,j}\Omega_{\ell,k}$. L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est ni commutatif, ni intègre.

• Matrices inversibles ; elles forment un groupe multiplicatif noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Isomorphisme entre $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{GL}(\mathbb{K}^n)$.

• Une matrice est inversible ssi elle est la matrice d'un isomorphisme ; ssi elle possède une inverse à gauche ; ssi elle possède une inverse à droite.

• Transposition ; matrices symétriques, anti-symétriques.

• Matrices triangulaires supérieures : elles forment un sous-anneau et un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Matrices triangulaires supérieures à diagonale unité : elles forment un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$; la preuve n'est pas exigible.

• Matrices diagonales ; CNS d'inversibilité.

• Opérations élémentaires, notées $\mathcal{L}_i \leftarrow \alpha\mathcal{L}_i$, $\mathcal{L}_i \leftrightarrow \mathcal{L}_j$ et $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i - \alpha\mathcal{L}_j$; interprétation en termes de produits à gauche par des matrices élémentaires ; celles-ci sont explicitées dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• ▶ Algorithme de calcul de l'inverse d'une matrice carrée, par la méthode des opérations élémentaires ; mise en œuvre de cet algorithme.

• Matrice, dans une base $\mathcal{B}$ d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, d'une famille finie $(v_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ de p vecteurs de cet espace.

• Matrice de passage $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{C}$; c'est la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$. C'est aussi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(Id_E)$.

• ▶ Effet d'un changement de base(s) sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme.

• Rang d'une matrice. $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r ssi il existe U et V inversibles telles que $A = UJ^{<n,p,r>}V$. Invariance du rang par transposition.

• ▶ Calcul pratique du rang d'une matrice.

• ▶ Trace d'une matrice carrée ; $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

2 Et aussi…

Cette quinzaine encore, n'hésitez pas demander le calcul du rang d'un endomorphisme, ou celui d'une famille de vecteurs…

N'oubliez pas d'indiquer sur la fiche de colle votre nom, et surtout le numéro de la semaine en cours !

MPB : 89 AC : 15 CP : 130 BG :