Sup PCSI 2 — Colle n° 19 et 20 — Quinzaine du 18/2 au 14/3

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Algèbre linéaire : dimension finie

• S.e.v. engendré par une famille $\mathcal{V} = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. E : c'est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathcal{V}$. C'est aussi le plus petit s.e.v. de E contenant $\mathcal{V}$. Notation $\mathrm{Vect}(\mathcal{V})$.

▶ • Dépendance et indépendance linéaire ; familles libres, familles liées. Remarque : les familles considérées sont finies.

• Familles génératrices. Espaces de dimension finie. Exemples de tels espaces ; exemples d'espaces qui ne sont pas de dimension finie.

• Une famille libre le reste si on lui enlève des vecteurs ; une famille génératrice le reste si on lui ajoute des vecteurs.

• $p + 1$ combinaisons linéaires de p vecteurs sont liées.

• Définition d'une base d'un $\mathbb{K}$-e.v. E de dimension finie ; existence d'une base. Toutes les bases de E ont le même cardinal, appelé dimension de E.

• Base canonique de $\mathbb{K}^n$.

• Dans un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie n, une famille libre (ou génératrice) de n vecteurs est une base.

• Dimension d'un s.e.v. : elle est au plus égale à la dimension de l'espace ; l'égalité a lieu ssi le s.e.v. est l'espace entier. Théorème dit « de la base incomplète ». Existence de supplémentaires d'un s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Caractérisations des supplémentaires avec la dimension.

• Relations $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$ et $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

• Lorsque E et F sont de dimension finie : construction d'une base de $E \times F$, lorsque l'on connaît des bases de E et F ; relation $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

• Une application linéaire partant d'un espace E de dimension finie est parfaitement définie par l'image d'une base de E.

• Une application linéaire est injective ssi elle conserve la notion de famille libre.

• Une application linéaire partant d'un espace de dimension finie est surjective ssi elle conserve la notion de famille génératrice.

• Si E est de dimension finie, toute application linéaire f de E dans F induit un isomorphisme d'un supplémentaire de $\ker(f)$ sur $\mathrm{im}(f)$.

• Théorème du rang.

• Pour une application linéaire f de E dans F, de même dimension finie n, équivalence entre : (i) f est bijective ; (ii) f est injective ; (iii) f est surjective ; (iv) $\ker(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$; (v) $\mathrm{rg}(f) = n$; (vi) f possède une inverse à gauche ; (vii) f possède une inverse à droite.

• Deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension.

▶ • Existence et unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base donnée d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie.

▶ Expression analytique d'une projection ou d'une symétrie, dans le cas où l'espace est $\mathbb{R}^3$.

2 Et aussi...

Cette quinzaine encore, n'hésitez pas demander le calcul d'un développement limité, d'une intégrale, d'une limite, d'un équivalent...

N'oubliez pas d'indiquer sur la fiche de colle votre nom, et surtout le $\boxed{\text{numéro}}$ de la semaine en cours !

MPB : 89 AC : 15 CP : 130 BG :