$\boxed{\text{Sup PCSI 2 — Colle n° 9 et 10 — Quinzaine du 26/11 au 7/12}}$

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Suites : généralités

• Définition d'une suite à valeurs dans E : c'est une fonction de $\mathbb{N}$ vers E. Extension : suites définies APCR. Image d'une suite.

• Exemples de modes de définition : explicite ; récurrence du premier ordre (lien avec l'itération d'une fonction) ; récurrence du deuxième ordre ; récurrence complète ; implicite.

• Vocabulaire général : suites bornées ; suite nulle, suites constantes, suites périodiques.

• Vocabulaire spécifique aux suites de réels : suites croissantes, décroissantes, monotones, majorées, minorées. Comparaison de deux suites au moyen de $\leqslant$.

• Opérations sur les suites de réels : somme, produit par λ, produit, quotient.

2 Convergence et limite

• Définition de la convergence d'une suite vers ℓ. Exemples : $1/n$, 2^{-n} ; contre-exemple : $(-1)^n$.

• Unicité de la limite d'une suite convergente.

• u converge vers 0 ssi $|u|$ converge vers 0.

• Toute suite convergente est bornée. Contre-exemple pour la réciproque.

• Si u converge vers 0 et si v est bornée, alors uv converge vers 0.

• Somme, produit par λ, produit, inverse, quotient de suites convergentes.

3 Suites extraites

• Notion de suite extraite. Une suite converge ssi toutes ses suites extraites convergent.

• Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite ℓ, alors (u_n) converge également vers ℓ.

• Utilisation de suites extraites pour établir la divergence d'une suite.

4 Résultats spécifiques aux suites de réels

• Si $|u| < v$ et si v converge vers 0, alors u converge vers 0. Théorème des trois suites.

• Si une suite converge vers $\ell > 0$, alors ses termes majorent $\ell/2$ APCR.

• La limite d'une suite convergente de réels positifs est positive (au sens large).

• Théorème admis (de la limite monotone) : toute suite croissante et majorée de réels converge ; sa limite est la borne supérieure de son image.

• ▶ Suites adjacentes : définition ; deux suites adjacentes convergent vers une même limite. Exemple : série harmonique alternée.

• Définition de la divergence d'une suite de réels vers $+\infty$. Pour une suite croissante : ou bien elle est majorée (auquel cas elle converge), ou bien elle n'est pas majorée (auquel cas elle diverge vers $+\infty$).

5 Relations de comparaison

• Notion de suite u négligeable devant une suite v, notation $u_n = o(v_n)$, exemples, compatibilité avec les opérations.

• Toute suite (u_n) de réels strictement positifs vérifiant $u_{n+1} \leqslant k u_n$ APCR avec $k < 1$ converge vers 0.

• Comparaison des suites de termes généraux respectifs $\big(\ln(n)\big)^\alpha$ $(\alpha > 0)$, n^β $(\beta > 0)$, γ^n $(\gamma > 1)$ et $n!$.

• Notion de suites équivalentes, notation $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, exemples, compatibilité avec les opérations. Lien entre cette notion et la précédente. Énumération d'équivalents usuels ; pour la plupart des preuves, on se ramène à des calculs de dérivées.

• Notation $u_n = \mathcal{O}(v_n)$: exemples, quelques propriétés.

▶ Notion de développement asymptotique ; exemple : obtention de $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

N'oubliez pas d'indiquer sur la fiche de colle votre nom, et surtout le numéro de la semaine en cours !

MPB : 89 AC : 15 CP : 130 BG :