Sup PCSI 2 — Colle n° 5 et 6 — Quinzaine du 15/10 au 26/10

*Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.*

## 1 Révisions : calculs

## 2 Récurrence

▶ Démonstrations par récurrence.

• Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément ; toute partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée possède un plus grand élément.

## 3 Opérateurs $\sum$ et $\prod$

▶ Manipulation des opérateurs $\sum$ et $\prod$ : propriétés algébriques, changement d'indices, télescopage.

• Calcul de $S_n^p = \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} k^p$, pour $p \in [\![1,3]\!]$.

▶ Permutation des opérateurs dans le cas de sommes « doubles ».

• Formule de Bernoulli : $a^n - b^n = \sum\limits_{0\leqslant k<n} a^k b^{n-1-k}$.

• Simplification de $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} \cos(kx)$ et $\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \sin(kx)$.

• Formule du binôme : preuve par récurrence.

## 4 Équations différentielles du premier ordre

• Définition d'une solution sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = \varphi(x, y)$ où $\varphi : I \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Notion de condition initiale. Courbes intégrales.

• ▶ Résolution de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$, où $a$ appartient à $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ; structure de l'ensemble des solutions ; existence et unicité de la solution vérifiant une condition initiale $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ ; écriture de cette solution au moyen d'une intégrale.

• ▶ Résolution de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$, où $a$ et $b$ appartiennent à $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ; structure de l'ensemble des solutions. Méthode dite de *variation de la constante*.

## 5 Équations différentielles linéaires du deuxième ordre

• Équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$, où $a \neq 0$, $b$, $c$ sont des complexes : structure de l'ensemble des solutions. Étude du cas où $a$, $b$ et $c$ sont réels.

• ▶ Résolution de l'équation $ay'' + by' + cy = \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} P_k(x)e^{\lambda_k x}$ où les $P_k$ sont des fonctions polynômes et les $\lambda_k$ des scalaires : technique de recherche d'une solution particulière.

**N'oubliez pas d'indiquer sur la fiche de colle votre nom, et surtout le $\boxed{\text{numéro}}$ de la semaine en cours !**