Sup PCSI 2 — Colle n° 17 et 18 — Quinzaine du 2/2/2004 au 13/2/2004

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Espaces vectoriels

• Définition d'un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$; exemples. Règles de calculs dans un $\mathbb{K}$-e.v.

• Espace vectoriel produit de deux $\mathbb{K}$-e.v.

• Définition d'une $\mathbb{K}$-algèbre ; exemples.

• Sous-espaces vectoriels : définition, exemples, caractérisation. S.e.v. nul ; droites vectorielles.

• Intersection de s.e.v.

• Somme de deux s.e.v. Sous-espaces en somme directe, notation $F \oplus G$. S.e.v. supplémentaires, notation $E = F \oplus G$.

• Applications linéaires : définition, exemples, caractérisation. Vocabulaire : endomorphismes, isomorphismes, automorphismes.

• Noyau et image d'une application linéaire ; ce sont des s.e.v. Plus généralement, l'image directe et l'image réciproque d'un s.e.v. sont elles-mêmes des s.e.v.

• $\mathcal{L}(E, F)$ possède une structure naturelle de $\mathbb{K}$-e.v.

• Composée de deux applications linéaires ; $\mathcal{L}(E)$ possède une structure naturelle de $\mathbb{K}$-algèbre.

• Bijection réciproque d'un isomorphisme ; $\mathcal{GL}(E)$ possède une structure naturelle de groupe.

▶ • Projecteurs : définition, $\ker p$ et $\operatorname{im} p$ sont supplémentaires. Projections ; équivalence entre projections et projecteurs.

• Endomorphismes involutifs, symétries.

• Combinaisons linéaires. Caractérisation des sous-espaces et des applications linéaires au moyen de cette notion.

2 Fonctions convexes

• ▶ Brefs rappels sur la notion de barycentre de deux points. Définition du segment $[A, B]$. Définition d'une partie convexe du plan ; exemples de parties convexes.

• Définition d'une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$: l'ensemble des points situés au-dessus de la courbe représentative est convexe. Exemples : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto |x|$.

• Une fonction est convexe ssi sa courbe représentative est située « sous ses cordes ».

• ▶ Caractérisation des fonctions convexes par l'inégalité de convexité $f\big((1-\lambda)x+\lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$. Équivalence avec l'inégalité à n points.

• Caractérisation des applications convexes dérivables, puis deux fois dérivables (démonstration non exigible). La continuité et la dérivabilité à droite et à gauche en tout point intérieur à I ont été prouvées, mais ne sont pas exigibles.

▶ Démonstration d'inégalités en faisant appel à des fonctions convexes.

N'oubliez pas d'indiquer sur la fiche de colle votre nom, et surtout le numéro de la semaine en cours !