Sup PCSI 2 — Colle n° 9 et 10 — Quinzaine du 24/11 au 5/12

*Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.*

## 1 Suites de réels et de complexes : généralités

• Définition d'une suite à valeurs dans $E$ : c'est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $E$. Exemples de modes de définition : explicite ; récurrence du premier ordre ; récurrence du deuxième ordre ; récurrence complète ; implicite. Lien avec l'itération d'une fonction.

• Vocabulaire général : suites bornées ; suite nulle, suites constantes, suites périodiques.

• Vocabulaire spécifique aux suites de réels : suites croissantes, décroissantes, monotones, majorées, minorées. Comparaison de deux suites au moyen de $\leqslant$.

• Opérations sur les suites de réels : somme, produit par $\lambda$, produit, quotient.

• Extension des définitions précédentes aux suites définies APCR. Notion de propriété vérifiée APCR. Suites stationnaires.

## 2 Convergence

• Définition de la convergence d'une suite vers $\ell$. Exemples : $1/n$, $2^{-n}$ ; contre-exemple : $(-1)^n$.

• Unicité de la limite d'une suite convergente.

• $u$ converge vers 0 ssi $|u|$ converge vers 0.

• Toute suite convergente est bornée. Contre-exemple pour la réciproque.

• Si $u$ converge vers 0 et si $v$ est bornée, alors $uv$ converge vers 0.

• Somme, produit par $\lambda$, produit, inverse, quotient de suites convergentes.

## 3 Résultats spécifiques aux suites de réels

• Si $|u| < v$ et si $v$ converge vers 0, alors $u$ converge vers 0. Théorème des trois suites.

• Si une suite converge vers $\ell > 0$, alors ses termes majorent $\ell/2$ APCR.

• La limite d'une suite convergente de réels positifs est positive (au sens large).

• Théorème admis (de la limite monotone) : toute suite croissante et majorée de réels converge.

• ▶ Suites adjacentes : définition ; deux suites adjacentes convergent vers une même limite. Exemple : série harmonique alternée.

• Définition de la divergence d'une suite de réels vers $+\infty$. Pour une suite croissante : ou bien elle est majorée (auquel cas elle converge), ou bien elle n'est pas majorée (auquel cas elle diverge vers $+\infty$).

## 4 Suites extraites

• Notion de suite extraite. Une suite converge ssi toutes ses suites extraites convergent. Si les suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent vers une même limite $\ell$, alors $(u_n)$ converge également vers $\ell$.

• Utilisation de suites extraites pour établir la divergence d'une suite.

## 5 Relations de comparaison

• Notion de suite $u$ négligeable devant une suite $v$, notation $u_n = o(v_n)$, exemples, compatibilité avec les opérations.

• Toute suite $(u_n)$ de réels strictement positifs vérifiant $u_{n+1} \leqslant k u_n$ APCR avec $k < 1$ converge vers 0.

• Comparaison des suites de termes généraux respectifs $\ln^\alpha n$ $(\alpha > 0)$, $n^\beta$ $(\beta > 0)$, $\gamma^n$ $(\gamma > 1)$ et $n!$.

• Notion de suites équivalentes, notation $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, exemples, compatibilité avec les opérations. Lien entre cette notion et la précédente. Énumération des équivalents usuels ; pour la plupart des preuves, on se ramène à des calculs de dérivées.

• Notation $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ : exemples, quelques propriétés.

▶ Notion de développement asymptotique ; exemple : obtention de $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

**N'oubliez pas d'indiquer sur la fiche de colle votre nom, et surtout le numéro de la semaine en cours !**