Sup PCSI 2 — Colle n° 25 et 26 — Quinzaine du 12/5 au 23/5

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Fractions rationnelles

• Corps $K(X)$ des fractions rationnelles. Opérations. Degré. Dérivation. Fractions rationnelles irréductibles. Pôles, ordre de multiplicité d'un pôle. Fonctions rationnelles.

• ▶ Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$: partie entière, partie polaire associée à un pôle a d'ordre de multiplicité d. Lorsque $d > 2$, des indications sur la méthode à suivre devront être données.

• ▶ Quelques techniques de calcul de la DES : utilisation de la parité, méthode du DL, comportement asymptotique de la fonction rationnelle associée...

• ▶ Calculs de sommes et d'intégrales faisant intervenir des DES. Attention : le calcul d'intégrales de la forme $\displaystyle\int \frac{dt}{(t-z)^d}$ avec $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ n'a pas été vu, et la DES dans $\mathbb{R}(X)$ n'est pas au programme !

2 Algèbre bilinéaire

• Définition d'un produit scalaire ; exemples : produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$; $(f,g) \mapsto \int_{[a,b]} fg$, dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Notations $u \cdot v$, $(u \mid v)$ et $\langle u \mid v \rangle$.

• ▶ Inégalité de Cauchy-Schwarz ; norme euclidienne, distance associée, inégalité triangulaire.

• Vecteurs unitaires, vecteurs orthogonaux. Familles orthogonales, orthonormales ; relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie. Toute famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux est libre.

• Identités de polarisation.

• Définition d'un espace euclidien.

• Existence de bases orthonormales : une preuve par récurrence a été donnée et peut être exigée. La méthode de Schmidt n'est pas au programme.

• Expression de la norme et du produit scalaire dans une b.o.n.

• Définition d'un endomorphisme orthogonal (conservant le produit scalaire). Caractérisation par la conservation de la norme, puis par l'image d'une (de toute) base orthonormée.

• La donnée d'une b.o.n. d'un espace euclidien de dimension n détermine un isomorphisme entre $\mathbb{R}^n$ et cet espace.

• Définition du groupe orthogonal $GO(E)$. Symétries orthogonales, réflexions. Il existe une et une seule réflexion qui échange deux vecteurs unitaires a et b.

• ▶ Définition des matrices orthogonales et du groupe $O(n)$. Caractérisation des matrices orthogonales par la relation $M\,{}^tM = {}^tM\,M = I_n$.

• Orthogonal d'une partie d'un espace euclidien ; sous-espaces vectoriels orthogonaux.

• L'orthogonal d'un s.e.v. F d'un espace euclidien est un supplémentaire de F, note $F^\perp$, et appelé supplémentaire orthogonal de F. Toute forme linéaire f s'écrit d'une manière et d'une seule $f : x \mapsto (a|x)$ où a est un vecteur.

• ▶ Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales, réflexions. Expression de la projection orthogonale d'un vecteur sur une droite ou un plan de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$; calcul de la matrice d'une telle projection orthogonale, ou d'une symétrie orthogonale, dans une base orthonormée.

N'oubliez pas d'indiquer sur la fiche de colle votre nom, et surtout le numéro de la semaine en cours !