Sup PCSI 2 — Colle n° 11 et 12 — Quinzaine du 9/12 au 20/12

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Suites de réels : généralités

Définition d'une suite de réels : c'est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. Exemples de modes de définition : explicite ; récurrence du premier ordre ; récurrence du deuxième ordre ; récurrence complète ; implicite.

• Vocabulaire : suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées, bornées. Suite nulle, suites constantes, suites périodiques. Comparaison de deux suites au moyen de $\leqslant$.

Opérations sur les suites de réels : somme, produit par $\lambda \in \mathbb{R}$, produit, quotient.

Extension des définitions précédentes aux suites définies APCR. Notion de propriété vérifiée APCR. Suites stationnaires.

2 Suites de réels : convergence

• Définition de la convergence d'une suite vers $\ell \in \mathbb{R}$. Exemples : $1/n$, 2^{-n} ; contre-exemple : $(-1)^n$.

• u converge vers 0 ssi $|u|$ converge vers 0. Si $|u| < v$ et si v converge vers 0, alors u converge vers 0. Théorème des trois suites.

• Unicité de la limite d'une suite convergente.

• Toute suite convergente est bornée. Contre-exemple pour la réciproque.

• Si u converge vers 0 et si v est bornée, alors uv converge vers 0.

• Somme, produit par $\lambda \in \mathbb{R}$, produit, inverse, quotient de suites convergentes.

• Toute suite (u_n) de réels strictement positifs vérifiant $u_{n+1} \leqslant k u_n$ APCR avec $k < 1$ converge vers 0.

• Comparaison des suites de termes généraux respectifs $\ln^\alpha n$ $(\alpha > 0)$, n^β $(\beta > 0)$, γ^n $(\gamma > 1)$ et $n!$.

3 Suites de réels : convergence et relation d'ordre

• Si une suite converge vers $\ell > 0$, alors ses termes majorent $\ell/2$ APCR.

• La limite d'une suite convergente de réels positifs est positive (au sens large).

• Théorème admis (de la limite monotone) : toute suite croissante et majorée de réels converge.

• ▶ Suites adjacentes : définition ; deux suites adjacentes convergent vers une même limite. Exemples.

• Définition de la divergence d'une suite de réels vers $+\infty$. Pour une suite croissante : ou bien elle est majorée (auquel cas elle converge), ou bien elle n'est pas majorée (auquel cas elle diverge vers $+\infty$).

4 Suites de réels : compléments

• Notion de suite extraite. Une suite converge ssi toutes ses suites extraites convergent. Si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite ℓ, alors (u_n) converge également vers ℓ. Utilisation de suites extraites pour établir la divergence d'une suite.

▶ Toute étude de suite de réels ne faisant appel qu'aux notions exposées ci-dessus.

5 Suites de réels : relations de comparaison

• Notion de suite u négligeable devant une suite v, notation $u_n = o(v_n)$, exemples, compatibilité avec les opérations.

• Notion de suites équivalentes, notation $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, exemples, compatibilité avec les opérations. Lien entre cette notion et la précédente. Énumération des équivalents usuels (sans preuve).

• Notation $u_n = \mathcal{O}(v_n)$: exemples, quelques propriétés.

▶ Exemples (simples) de développements asymptotiques.

N'oubliez pas d'indiquer sur la fiche de colle votre nom, et surtout le numéro de la semaine en cours !

AC : 15 VJ : 39 CP : 95