Sup PCSI 2 — Colle n° 3 et 4 — Quinzaine du 30/09 au 11/10

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Combinatoire

• Notation $|X|$ pour le cardinal d'un ensemble X fini. Cardinal de $E \cup F$, $E \times F$, F^E. Nombre d'injections de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Nombre de k-parties d'un ensemble à n éléments ; cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

▶ Dénombrements divers, manipulation de sommes faisant intervenir des coefficients binomiaux.

▶ Méthode du double décompte pour établir des identités.

2 Complexes

▶ • Rappels : règles de calcul dans $\mathbb{C}$, conjugaison, module, argument.

▶ • Fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it}$; propriétés (admises) de cette fonction ; Transformation des expressions $e^{ix}+1$ et $e^{ix}-1$.

▶ • Formule de Moivre. Formulaire de trigonométrie (ne faisant intervenir que sin et cos) ; linéarisation, application au calcul d'intégrales.

▶ • Transformation de l'expression $a\cos(x)+b\sin(x)$. Résolution des équations $\sin(x)=\sin(\alpha)$ et $\cos(x)=\cos(\alpha)$.

▶ • Racines carrées d'un complexe non nul, calcul effectif.

▶ • Résolution de l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$.

▶ • Racines n-ièmes de l'unité : existence, énumération ; somme. Attention au cas $n=1$!

▶ • Racines n-ièmes d'un complexe non nul.

▶ Résolution d'équations particulières de degré 3 ou plus.

3 Fonctions polynômes

Le cours présente les fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, mais il a été signalé que tous les résultats énoncés s'étendent immédiatement aux fonctions polynômes de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

• Définition. Somme et produit de fonctions polynômes.

• Pour une fonction polynôme f autre que $\mathbf{0}$, unicité de l'écriture $f(x)=\sum_{0\leqslant k\leqslant n} a_k x^k$, avec $a_n \neq 0$. Notation $[x^k]f(x)$ pour le coefficient de x^k dans l'écriture de $f(x)$.

▶ • Degré et coefficient dominant d'une fonction polynôme autre que $\mathbf{0}$. Par convention, $\deg \mathbf{0} = -\infty$. Degré de la somme, condition suffisante pour avoir l'égalité $\deg(f+g)=\max(\deg f, \deg g)$. Degré du produit.

▶ • Racines d'une fonction polynôme. Divisibilité par $x-a$. Pratique de la division euclidienne par $x-a$.

• Une fonction polynôme de degré n possède au plus n racines distinctes.

▶ Exemples d'études de familles de fonctions polynômes définies par une relation de récurrence ; calcul du degré, du coefficient dominant, du coefficient de x^k...

N'oubliez pas d'indiquer sur la fiche de colle votre nom, et surtout le numéro de la semaine en cours !