Sup PCSI 2 — Colle n° 7 et 8 — Quinzaine du 05/11 au 16/11

*Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.*

## 1 Fonction arctan

• On note arctan la primitive nulle en 0 de $x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$, impaire, strictement croissante ; on a $\tan(\arctan x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

• On montre que $\arctan(\tan x) = x$ pour tout $x \in ]-\pi/2, \pi/2[$. Limites de arctan en $-\infty$ et $+\infty$. Allure de la courbe représentative de arctan.

• ▶ Simplification de sommes algébriques d'arc tangentes.

## 2 Équations différentielles du premier ordre

• Définition d'une solution sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $\Phi(x, y, y') $ où $\varphi : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Cas de l'équation résolue en $y'$.

• Notion de condition initiale. Courbes intégrales.

• ▶ Résolution de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$, où $a$ et $b$ appartiennent à $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ; structure de l'ensemble des solutions. Existence et unicité de la solution vérifiant une condition initiale $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ ; écriture de cette solution au moyen de deux intégrales. Méthode dite de *variation de la constante*.

## 3 Suites de réels

Définition d'une suite de réels : c'est une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$. Exemples de modes de définition : explicite ; récurrence du premier ordre ; récurrence du deuxième ordre ; récurrence complète ; implicite.

• Vocabulaire : suites croissantes, décroissantes, majorées, minorées, bornées. Suite nulle, suites constantes, suites stationnaires. Suites périodiques. Comparaison de deux suites au moyen de $\leqslant$.

Opérations sur les suites de réels : somme, produit par $\lambda \in \mathbb{R}$, produit, quotient.

Extension des définitions précédentes aux suites définies APCR. Notion de propriété vérifiée APCR.

• Définition de la convergence d'une suite vers $\ell \in \mathbb{R}$. Exemples : $1/n$, $2^{-n}$ ; contre-exemple : $(-1)^n$.

• $u$ converge vers 0 ssi $|u|$ converge vers 0. Si $|u| < v$ et si $v$ converge vers 0, alors $u$ converge vers 0.

• Unicité de la limite d'une suite convergente.

• Toute suite convergente est bornée. Contre-exemple pour la réciproque.

• Si une suite converge vers $\ell > 0$, alors ses termes majorent $\ell/2$ APCR.

• La limite d'une suite convergente de réels positifs est positive (au sens large).

• Somme, produit par $\lambda \in \mathbb{R}$, produit, inverse, quotient de suites convergentes.

Théorème des trois suites.

• Toute suite $(u_n)$ de réels strictement positifs vérifiant $u_{n+1} \leqslant k u_n$ APCR avec $k < 1$ converge vers 0.

• Comparaison des suites de termes généraux respectifs $\ln^\alpha n$ $(\alpha > 0)$, $n^\beta$ $(\beta > 0)$, $\gamma^n$ $(\gamma > 1)$ et $n!$.

• Théorème admis : si la suite $u$ converge vers $\ell$, et si $f$ est continue sur un intervalle contenant tous les termes de la suite, ainsi que $\ell$, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(\ell)$. Contre-exemple avec la fonction « partie entière ».

• Théorème admis (de la limite monotone) : toute suite croissante et majorée de réels converge.

• ▶ Suites adjacentes : définition ; deux suites adjacentes convergent vers une même limite. Exemples.

• Définition de la divergence d'une suite de réels vers $+\infty$. Pour une suite croissante : ou bien elle est majorée (auquel cas elle converge), ou bien elle n'est pas majorée (auquel cas elle diverge vers $+\infty$).

• Notion de suite extraite. Une suite converge ssi toutes ses suites extraites convergent. Si les suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent vers une même limite $\ell$, alors $(u_n)$ converge également vers $\ell$. Utilisation de suites extraites pour établir la divergence d'une suite.

▶ Toute étude de suite de réels ne faisant appel qu'aux notions exposées ci-dessus.

**N'oubliez pas d'indiquer sur la fiche de colle votre nom, et surtout le numéro de la semaine en cours !**