Sup PCSI 2 — Colles n° 19 et 20 — Quinzaine du 5/3 au 16/3

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Fonctions convexes

• ▶ Brefs rappels sur la notion de barycentre de deux points. Définition du segment $[A, B]$. Définition d'une partie convexe du plan ; exemples de parties convexes.

• Définition d'une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$: l'ensemble des points situés au-dessus de la courbe représentative est convexe. Exemple : $x \mapsto x^2$.

• Une fonction est convexe ssi sa courbe représentative est située « sous ses cordes ».

• ▶ Caractérisation des fonctions convexes par l'inégalité de convexité $f\big((1-\lambda)x+\lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$. Équivalence avec l'inégalité à n points.

• Caractérisation des applications convexes dérivables, puis deux fois dérivables (démonstration non exigible).

▶ Démonstration d'inégalités en faisant appel à des fonctions convexes.

2 Calcul matriciel

Définition de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, opérations sur les matrices. Structures respectives de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Transposition ; matrices symétriques, anti-symétriques.

• Matrices triangulaires supérieures : elles forment une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Matrices triangulaires supérieures à diagonale unité : elle forment un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

• Matrices diagonales.

• Définition de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $E_{i,j}$ est la matrice définie par $(E_{i,j})_{\ell,k} = \delta_{i,\ell}\delta_{j,k}$. Calcul du produit $E_{i,j}E_{p,q}$.

• Opérations élémentaires, notées $\mathcal{L}_i \leftarrow \alpha\mathcal{L}_i$, $\mathcal{L}_i \leftrightarrow \mathcal{L}_j$ et $\mathcal{L}_i \leftarrow \mathcal{L}_i - \alpha\mathcal{L}_j$; interprétation en termes de produits à gauche par des matrices élémentaires ; celles-ci sont explicitées dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• ▶ Algorithme de calcul de l'inverse d'une matrice carrée ; mise en œuvre de cet algorithme.

• Matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ d'une application linéaire u d'un $\mathbb{K}$-e.v. E de dimension p muni d'une base $\mathcal{B}$ dans un $\mathbb{K}$-e.v. F de dimension n muni d'une base $\mathcal{C}$. L'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.

• Matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-e.v. E de dimension n muni d'une base $\mathcal{B}$. L'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

• Matrice, dans une base $\mathcal{B}$ d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, d'une famille finie $(v_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ de p vecteurs de cet espace.

• Matrice de passage $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$; c'est la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la famille $\mathcal{B}'$. C'est aussi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(Id_E)$.

• ▶ Effet d'un changement de base(s) sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme.

• Rang d'une matrice. $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r ssi il existe U et V inversibles telles que $A = UJ^{<n,p,r>}V$. Invariance du rang par transposition.

• Trace d'une matrice carrée ; $\mathrm{tr}\,AB = \mathrm{tr}\,BA$.