Sup PCSI 2 — Colles n° 17 et 18 — Quinzaine du 5/2 au 2/3

Les points marqués d'un • peuvent faire l'objet de questions de cours avec démonstrations détaillées. Les points marqués d'un ▶ se prêtent particulièrement à des exercices.

1 Algèbre linéaire

• Combinaisons linéaires. Caractérisation des sous-espaces et des applications linéaires au moyen de cette notion.

• S.e.v. enfendré par une partie A de E : c'est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A. C'est aussi le plus s.e.v. de E contenant A. Notation $\mathrm{Vect}(A)$.

• Dépendance et indépendance linéaire ; familles libres, familles liées. Remarque : les familles considérées sont finies.

• Familles génératrices. Espaces de dimension finie. Exemples de tels espaces ; exemples d'espaces qui ne sont pas de dimension finie.

• $p+1$ combinaisons linéaires de p vecteurs sont liées.

• Bases d'un $\mathbb{K}$-e.v. Existence de bases pour un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie ; si E est de dimension finie, toutes ses bases ont le même cardinal, appelé dimension de E.

• Dimension d'un s.e.v. : elle est au plus égale à la dimension de l'espace ; l'égalité a lieu ssi le s.e ;v. est l'espace entier. Théorème de la base incomplète. Existence de supplémentaires d'un s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie.

• Existence et unicité des composantes d'un vecteur dans une base donnée d'un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie.

• Relations $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$ et $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

• Base canonique de $\mathbb{K}^n$.

• Lorsque E et F sont de dimension finie : construction d'une base de $E \times F$, lorsque l'on connaît des bases de E et F ; relation $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

• Dans un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n, une famille libre (ou génératrice) de n vecteurs est une base.

• Une application linéaire est parfaitement définie par l'image d'une base de l'espace de départ.

• Une application linéaire est injective ssi elle conserve la notion de famille libre.

• Une application linéaire partant d'un espace de dimension finie est surjective ssi elle conserve la notion de famille génératrice.

• Si E est de dimension finie, tout homomorphisme f de E dans F induit un isomorphisme d'un supplémentaire de $\ker f$ sur $\mathrm{im}\, f$.

• Théorème du rang.

• Pour un homomorphisme f de E dans F, de même dimension finie n, équivalence entre : (i) f est bijectif ; (ii) f est injectif ; (iii) f est surjectif ; (iv) $\ker f = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$; (v) $\mathrm{rg}\, f = n$.

• Deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont même dimension.