Exercices sur les polynômes

Énoncé 1

•• Que peut-on dire de trois éléments P, Q et R de $\mathbb{R}[X]$, s'ils vérifient $P^2 - XQ^2 + R^2 = 0$?

Corrigé 1

•• Ces trois polynômes sont nuls ! En effet, écrivons l'égalité $XQ^2 = P^2 + R^2$; le membre de gauche est, soit nul, soit de degré impair, tandis que celui de droite est, soit nul, soit pair. Donc tous deux sont nuls. Mais alors $Q = 0$; et, comme les polynômes sont à coefficients réels, $P = R = 0$ (considérez les fonctions polynômes associées à P^2 et R^2 : elles sont toutes deux positives, leur somme est nulle, donc chacune est nulle).

Énoncé 2

•• Définissons une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes en posant $P_0 = X$ et $P_{n+1} = (P_n - 2)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Explicitez le reste dans la division euclidienne de P_n par X^3.

Corrigé 2

•• Notons $P_n = a_n + b_nX + c_nX^2 + X^3Q_n$. Il s'agit de donner des formules pour a_n, b_n et c_n. Nous avons déjà $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$. Par ailleurs, $P_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}X + c_{n+1}X^2 + X^3Q_{n+1}$ donne, par identification avec $P_{n+1} = \left(a_n - 2 + b_nX + c_nX^2 + X^3Q_n\right)^2$: $a_{n+1} = (a_n - 2)^2$, $b_{n+1} = 2(a_n - 2)b_n$ et $c_{n+1} = {b_n}^2 + 2(a_n - 2)c_n$. Nous avons donc $a_1 = 4$, puis, avec une récurrence immédiate, $a_n = 4$ pour tout $n \geqslant 1$. Nous en déduisons, toujours pour $n \geqslant 1$, $b_{n+1} = 4b_n$, d'où $b_n = -4^n$ puisque $b_1 = -4$. Alors (toujours avec $n \geqslant 1$), nous avons $c_{n+1} = 4^{2n} + 4c_n$ soit $\frac{c_{n+1}}{4^{n+1}} = 4^{n-1} + \frac{c_n}{4^n}$; donc, avec $c_1 = 1$:

$$\begin{aligned}\frac{c_n}{4^n} &= \frac{c_1}{4} + \sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\left(\frac{c_{k+1}}{4^{k+1}} - \frac{c_k}{4^k}\right) = \frac{1}{4} + \sum_{1\leqslant k\leqslant n-1} 4^{k-1} = \frac{1}{4} + \sum_{0\leqslant k\leqslant n-2} 4^k \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1-4^{n-1}}{1-4} = \frac{1}{4} + \frac{4^{n-1}-1}{3} = \frac{4^n-1}{12}\end{aligned}$$

Donc $c_n = \dfrac{4^{2n-1} - 4^{n-1}}{3}$. Nous constatons que cette formule vaut en fait pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé 3

•• Déterminez les éléments P de $\mathbb{K}[X]$ tels que $(X + 4)P = XP(X + 1)$.

Corrigé 3

•• Il est clair que $P = 0$ est une solution. Soit $P \neq 0$ une autre solution : $P(0) = 0$; nous en déduisons successivement $P(-1) = 0$, $P(-2) = 0$ et $P(-3) = 0$. Donc P est divisible par $X(X + 1)(X + 2)(X + 3)$. Réciproquement si P est divisible par $X(X+1)(X+2)(X+3)$, alors, notant $P = X(X+1)(X+2)(X+3)Q$, nous aurons

$$\begin{aligned}XP(X + 1) &= X(X + 1)(X + 2)(X + 3)(X + 4)Q(X + 1)\\ (X + 4)P(X) &= (X + 4)X(X + 1)(X + 2)(X + 3)Q(X)\end{aligned}$$

d'où $Q(X) = Q(X + 1)$: Q est nécessairement un polynôme constant (observez $Q - Q(0)$: il s'annule en tout point de $\mathbb{Z}$). Conclusion : les solutions sont les polynômes de la forme $\lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Énoncé 4

•• $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $P(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrez qu'il existe R et S dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = R^2 + S^2$.

Corrigé 4

•• Observons que P est nécessairement de degré pair ; de plus, son coefficient dominant, que nous noterons α, est strictement positif.

Notons d'abord que, dans tout anneau commutatif, et en particulier dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(A^2+B^2)(C^2+D^2) = A^2C^2+A^2D^2+B^2C^2+B^2D^2 = (AC+BD)^2+(AD-BC)^2$$

Ainsi, le produit de deux sommes de deux carrés parfaits est encore une somme de deux carrés parfaits. De plus, tout carré parfait est une somme de deux carrés parfaits (lui ajouter 0^2). Écrivons la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles :

$$P = \alpha \prod_{1\leqslant k\leqslant m} (X-x_k)^{2d_k} \prod_{1\leqslant k\leqslant n} (X^2-2b_kX+c_k)^{e_k}$$

avec ${b_k}^2 - c_k < 0$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, et $\alpha > 0$. Comme α et $\displaystyle\prod_{1\leqslant k\leqslant m} (X-x_k)^{2d_k}$ sont des carrés parfaits, il suffit d'établir que chaque $X^2-2b_kX+c_k$ est une somme de deux carrés parfaits, ce qui est clair :

$$X^2-2b_kX+c_k = (X-b_k)^2+c_k-{b_k}^2 = (X-b_k)^2+\left(\sqrt{c_k-{b_k}^2}\right)^2$$

Énoncé 5

•• Factorisez $P = (X+i)^n-(X-i)^n$ dans $\mathbb{C}[X]$. En déduire une expression de

$$\prod_{1\leqslant k\leqslant q}\left(4+\operatorname{cotan}^2\Big(\frac{k\pi}{2q+1}\Big)\right)$$

sous forme d'une somme *assez simple*.

Corrigé 5

•• P est de degré $n-1$; en notant $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$, il vient :

$$P(\alpha)=0 \iff (\alpha+i)^n-(\alpha-i)^n=0 \iff \Big(\frac{\alpha+i}{\alpha-i}\Big)^n = 1 \text{ \underline{et} } \alpha\neq i$$

$$\iff \frac{\alpha+i}{\alpha-i} = e^{i\theta_k} \text{ \underline{et} } \alpha\neq i \iff \big(e^{i\theta_k}-1\big)\alpha = i\big(e^{i\theta_k}+1\big) \text{ \underline{et} } \alpha\neq i$$

soit $\alpha = i\frac{e^{i\theta_k}+1}{e^{i\theta_k}-1}$ avec $k\in[\![1,n-1]\!]$; donc $\alpha = i\operatorname{cotan}\Big(\dfrac{k\pi}{n}\Big)$. Nous avons ainsi exhibé $n-1$ racines de P, si bien que

$$P = \frac{1}{2ni}\prod_{1\leqslant k\leqslant n-1}\left(X - i\operatorname{cotan}\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)\right)$$

puisque le coefficient dominant de P est $2ni$.

• Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned}
\prod_{1\leqslant k\leqslant q}\Big(4+\operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2q+1}\Big) &= \prod_{1\leqslant k\leqslant q}\Big(2+i\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2q+1}\Big)\times\prod_{1\leqslant k\leqslant q}\Big(2-i\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2q+1}\Big)\\
&= \prod_{1\leqslant k\leqslant q}\Big(2+i\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2q+1}\Big)\times\prod_{1\leqslant k\leqslant q}\Big[2+i\operatorname{cotan}\Big(\pi-\frac{k\pi}{2q+1}\Big)\Big]\\
&= \prod_{1\leqslant k\leqslant q}\Big(2+i\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2q+1}\Big)\times\prod_{1\leqslant k\leqslant q}\Big(2+i\operatorname{cotan}\frac{(2q+1-k)\pi}{2q+1}\Big)\\
&= \prod_{1\leqslant k\leqslant 2q}\Big(2+i\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{2q+1}\Big) = 2niP(2) = 2ni\big[(2+i)^n-(2-i)^n\big)\big]\\
&= 4ni\sum_{0\leqslant k\leqslant q}\binom{2q+1}{2k+1}2^{2k}i^{2q+1-2k} = -4n\sum_{0\leqslant k\leqslant q}\binom{2q+1}{2k+1}2^{2k}(-1)^{q-k}
\end{aligned}$$

Énoncé 6

•• Un polynôme P a pour restes respectifs 3, 7 et 13 dans les divisions euclidiennes par $X+1$, $X+2$ et $X+3$. Quel est son reste dans la division euclidienne par $(X+1)(X+2)(X+3)$?

Corrigé 6

•• Ce reste est de degré 2 au plus : en l'exprimant dans la base $\big(1, X+1, (X+1)(X+2)\big)$ de $\mathbb{K}_2[X]$, nous cherchons $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tels que

$$P = (X+1)(X+1)(X+2)Q + a + b(X+1) + c(X+1)(X+2)$$

Mais $P(-1) = 3$, $P(-2) = 7$ et $P(-3) = 13$ d'après les hypothèses ; d'où $a = 3$, $a - b = 7$ et $a - 2b + 2c = 13$; donc $b = -4$ et $c = 1$, finalement le reste cherché est $3 - 4(X+1) + (X+1)(X+2) = X^2 - X + 1$.

Énoncé 7

•• Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré n. Notons $P = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k X^k$ et $m(P) = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$. Montrez que toute racine ξ de P vérifie $|\xi| \leqslant 1 + \dfrac{m(P)}{|a_n|}$.

Corrigé 7

•• L'inégalité est claire si $|\xi| \leqslant 1$. Sinon, quitte à diviser tous les coefficients par a_n (qui n'est pas nul), nous nous ramenons à établir $|\xi| \leqslant 1 + m(P)$ lorsque P est unitaire. Or :

$$\begin{aligned} P(\xi) = 0 &\Rightarrow \xi^n + \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} a_k \xi^k = 0 \\ &\Rightarrow \big|\xi\big|^n = |\xi^n| = \Big|-\sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} a_k \xi^k\Big| \leqslant \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |a_k| \cdot |\xi|^k \leqslant m(P) \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |\xi|^k = m(P) \frac{|\xi^n| - 1}{|\xi| - 1} \end{aligned}$$

À plus forte raison, $\big|\xi\big|^n \leqslant m(P) \dfrac{|\xi|^n}{|\xi| - 1}$, soit $1 \leqslant \dfrac{m(P)}{|\xi| - 1}$, que l'on écrit $|\xi| - 1 \leqslant m(P)$, ou enfin $|\xi| \leqslant 1 + m(P)$. Cette majoration a été établie par Cauchy en 1829.

Énoncé 8

•• $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Fixons un naturel n non nul, une famille $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts, et deux familles $(b_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et $(c_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$. Prouvez qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{K}_{2n-1}[X]$ vérifiant $P(a_k) = b_k$ et $P'(a_k) = c_k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

Corrigé 8

•• Considérons la fonction Φ qui, à $P \in \mathbb{K}_{2n-1}[X]$, associe le $2n$-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$\big(P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n), P'(a_1), P'(a_2), \ldots, P'(a_n)\big)$$

Φ est clairement linéaire ; elle est injective, car, si $P \in \ker(\Phi)$, alors P s'annule, ainsi que son dérivé, en chacun des a_k ; ce qui revient à dire que P possède n racines doubles distinctes. Mais P est de degré strictement inférieur à $2n$. Donc $P = 0$. Du coup, Φ, en tant qu'application linéaire injective, entre deux $\mathbb{K}$-e.v. de même dimension finie $2n$, est surjective, donc bijective, ce qui assure l'existence et l'unicité du polynôme P demandé (interpolation d'Hermite).

Énoncé 9

•• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrez que l'équation $P(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions.

Corrigé 9

•• Le résultat est clair si $P = 0$: il n'y aucune solution. Sinon, notons $n = \deg(P)$, et $g : x \mapsto P(x) - e^x$. La fonction g ne peut s'annuler plus de $n+1$ fois sur $\mathbb{R}$: sinon, en appliquant répétitivement le théorème de Rolle, $g' : x \mapsto P'(x) - e^x$ s'annulerait plus de n fois… $g^{(k)} : x \mapsto P^{(k)}(x) - e^x$ s'annulerait plus de $n+1-k$ fois, et enfin $g^{(n+1)} : x \mapsto P^{(n+1)}(x) - e^x = e^x$ s'annulerait au moins une fois, ce qui serait absurde. Nous avons donc un résultat plus précis : si P est de degré n, l'équation considérée possède au plus $n+1$ racines réelles.

Énoncé 10

•• Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$, et $P = (X-1)^n - e^{2i\alpha}(X+1)^n$. Factorisez P, en déduire la valeur de $\prod\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \operatorname{cotan}\Big(x + \dfrac{k\pi}{n}\Big)$ lorsque $nx \notin \pi\mathbb{Z}$.

Corrigé 10

•• $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, donc $e^{2i\alpha} \neq 1$; ainsi, P est de degré n exactement. Comme $P(-1) \neq 0$, nous avons :

$$P(x) = 0 \iff \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n = e^{2i\alpha} \iff \exists k \in [\![0,n-1]\!] : \frac{x-1}{x+1} = {\xi_k}^2$$

où $\xi_k = \exp\left(\dfrac{i(\alpha + k\pi)}{n}\right)$. Mais, notant $\theta_k = \dfrac{\alpha + k\pi}{n}$:

$$\frac{x-1}{x+1} = {\xi_k}^2 \iff x = \frac{1 + {\xi_k}^2}{1 - {\xi_k}^2} = \frac{\overline{\xi_k} + \xi_k}{\overline{\xi_k} - \xi_k} = \frac{2\cos(\theta_k)}{-2i\sin(\theta_k)} = i\,\mathrm{cotan}(\theta_k)$$

Les θ_k sont deux à deux distincts, et tous dans un même intervalle d'amplitude $\theta_{n-1} - \theta_0 = \dfrac{(n-1)\pi}{n} < \pi$, donc les $\mathrm{cotan}(\theta_k)$ sont deux à deux distincts. Nous avons ainsi exhibé n racines distinctes de P, lequel est de degré n ; comme son coefficient dominant est $1 - e^{2i\alpha}$, nous pouvons écrire :

$$P(X) = (1 - e^{2i\alpha}) \prod_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \big(X - i\,\mathrm{cotan}(\theta_k)\big)$$

• Notons $\alpha = nx$, si bien que $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$. Alors, avec les résultats précédents :

$$\prod_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \mathrm{cotan}\Big(x + \frac{k\pi}{n}\Big) = \frac{1}{i^n} \prod_{0 \leqslant k \leqslant n-1} i\,\mathrm{cotan}(\theta_k) = \frac{1}{i^n} \frac{(-1)^n P(0)}{1 - e^{2i\alpha}} = i^n \frac{(-1)^n - e^{2i\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}}$$

Si $n = 2p$, il vient

$$\prod_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \mathrm{cotan}\Big(x + \frac{k\pi}{n}\Big) = i^n \frac{(-1)^n - e^{2i\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}} = (-1)^p \frac{1 - e^{2i\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}} = (-1)^p$$

Sinon, avec $n = 2p + 1$:

$$\prod_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \mathrm{cotan}\Big(x + \frac{k\pi}{n}\Big) = i^n \frac{(-1)^n - e^{2i\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}} = i^{2p+1} \frac{-1 - e^{2i\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}}$$

$$= i(-1)^{p+1} \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}} = i(-1)^{p+1} \frac{2\cos(\alpha)}{-2i\sin(\alpha)} = (-1)^p\,\mathrm{cotan}(\alpha) = (-1)^p\,\mathrm{cotan}(nx)$$

Énoncé 11

•• Déterminez $P \in \mathbb{C}_3[X]$ vérifiant $P(j) = j^2$, $P(j^2) = j$, $P'(j) = j$ et $P'(j^2) = j^2$.

Corrigé 11

•• Notons $Q = P' - X$; $Q \in \mathbb{C}_2[X]$ et $Q(j) = Q(j^2) = 0$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$Q = \lambda(X - j)(X - j^2) = \lambda(X^2 + X + 1)$$

Par suite, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$P = \frac{\lambda}{3} X^3 + \frac{\lambda + 1}{2} X^2 + \lambda X + \mu$$

λ et μ doivent vérifier :

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda}{3} + \dfrac{\lambda+1}{2} j^2 + \lambda j + \mu = j^2 \\ \dfrac{\lambda}{3} + \dfrac{\lambda+1}{2} j + \lambda j^2 + \mu = j \end{cases} \iff \begin{cases} 2\dfrac{\lambda}{3} - \dfrac{\lambda+1}{2} - \lambda + 2\mu = -1 \\ \dfrac{\lambda+1}{2} - \lambda = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\mu = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{5\lambda}{6} \\ -\dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Donc $\lambda = -1$ et $\mu = -\dfrac{2}{3}$. Finalement, $P = -\dfrac{X^3}{3} - X - \dfrac{2}{3}$.

Énoncé 12

•• Trois éléments P, Q et R de $\mathbb{R}[X]$ vérifient $P^2 - XQ^2 = XR^2$. Montrez qu'ils sont tous trois nuls.

Corrigé 12

•• L'égalité proposée s'écrit $P^2 = X(Q^2 + R^2)$. Supposons P et Q non tous deux nuls ; alors le polynôme $Q^2 + R^2 = (Q + iR)(Q - iR)$ est de degré pair ; en effet, Q et R étant à coefficients réels, $Q + iR$ et $Q - iR$ ont même degré. Mais P^2, de degré pair, ne peut être égal à $X(Q^2 + R^2)$, de degré impair. Du coup, Q et R doivent être tous deux nuls, et par suite P est lui aussi nul.

Énoncé 13

•• Soit $A \in \mathbb{K}[X]$, unitaire et de degré $2n$. Montrez qu'il existe des éléments B et R de $\mathbb{K}[X]$ tels que $A = B^2 + R$ et $\deg R < n$.

Corrigé 13

•• Si (B, R) est une solution, alors B doit être de degré n. Notons $A = \sum_{0 \leqslant k \leqslant 2n} a_k X^k$, avec $a_{2n} = 1$; et $B = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} b_k X^k$. Identifions les termes de degré au moins égal à n, dans les expressions respectives de A et de $B^2 + R$:

$$\begin{cases} {b_n}^2 &= a_{2n} = 1 \\ 2b_n b_{n-1} &= a_{2n-1} \\ &\vdots \\ \sum_{0 \leqslant k \leqslant p} b_{n-k} b_{n-p+k} &= a_{2n-p} \qquad \text{pour } p \in [\![2, n-1]\!] \\ &\vdots \\ \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} b_{n-k} b_k &= a_n \end{cases}$$

Notant alors $\varepsilon = \pm 1$, il vient, en résolvant :

$$\begin{cases} b_n &= \varepsilon \\ b_{n-1} &= \dfrac{a_{2n-1}}{2\varepsilon} \\ &\vdots \\ b_{n-p} &= \dfrac{1}{2\varepsilon}\Big(a_{2n-p} - \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant p-1} b_{n-k} b_{n-p+k}\Big) \qquad \text{pour } p \in [\![2, n-1]\!] \\ &\vdots \\ b_0 &= \dfrac{1}{2\varepsilon}\Big(a_n - \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n-1} b_{n-k} b_k\Big) \end{cases}$$

ce qui donne deux solutions, l'une B unitaire, l'autre $-B$; avec, à chaque fois, $R = A - B^2$.

Énoncé 14

•• Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré n. Notant $P = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k X^k$, montrez que toute racine ξ de P vérifie

$$|\xi| \leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \sqrt[n-k]{\left| n \frac{a_k}{a_n} \right|}$$

Corrigé 14

•• Quitte à diviser tous les coefficients de P par $a_n \neq 0$, nous pouvons supposer $a_n = 1$. Pour abréger, notons $\rho = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \sqrt[n-k]{|na_k|}$: nous avons $|na_k| \leqslant \rho^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Soit ξ une racine de P. Si $\xi = 0$, le résultat est clair. Sinon, $\xi^n = -\sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} a_k \xi^k$, donc $|\xi|^n \leqslant \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |a_k| \cdot |\xi|^k$, dont on déduit

$$|\xi|^n \leqslant \frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |\xi|^k \rho^{n-k} = \frac{|\xi|^n}{n} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left(\frac{\rho}{|\xi|} \right)^{n-k}$$

d'où $1 \leqslant \dfrac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left(\dfrac{\rho}{|\xi|} \right)^{n-k}$. Alors $|\xi| > \rho$ mènerait à une contradiction, car le membre de droite de cette inégalité serait strictement inférieur à 1. Donc $|\xi| \leqslant \rho$.

Cette majoration a été établie par Cauchy en 1829.

Énoncé 15

•• Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré n. Notant $P = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k X^k$, montrez que toute racine ξ de P vérifie

$$|\xi| \leqslant 2 \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \sqrt[n-k]{|a_k|}$$

Corrigé 15

•• Quitte à diviser tous les coefficients de P par $a_n \neq 0$, on peut supposer $a_n = 1$. Pour abréger, notons $\rho = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \sqrt[n-k]{|a_k|}$: ainsi $|a_k| \leqslant \rho^{n-k}$ pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$. Soit ξ une racine de P. Si $\xi = 0$, le résultat est clair. Sinon, $\xi^n = -\sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} a_k \xi^k$, donc

$$|\xi|^n \leqslant \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |a_k| \cdot |\xi|^k \leqslant \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \rho^{n-k} |\xi|^k = |\xi|^n \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left(\frac{\rho}{|\xi|}\right)^{n-k} = |\xi|^n \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\frac{\rho}{|\xi|}\right)^k$$

dont nous déduisons $1 \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\frac{\rho}{|\xi|}\right)^k$. Supposons $|\xi| > 2\rho$; alors le membre de droite de cette inégalité serait strictement inférieur à :

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \sum_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k \geqslant 0} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$$

Ceci est contradictoire. Donc $|\xi| \leqslant 2\rho$.

Cette majoration a été établie par D.E. Knuth en 1981.