

# SUJET

## Problème 1

### Partie I

Notons  $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^t}{1+t^2}$ . Il est clair que  $f$  est définie  $\mathbb{R}$  entier, et que cette fonction est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Nous noterons  $C_f$  la courbe représentative de  $f$ .

1. – Quelle est la limite de  $f(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$  ?
2. – Qu'en déduisez-vous au sujet de  $C_f$  ?
3. – Complétez chacune des phrases suivantes au moyen de l'une des locutions « est équivalent à », « est négligeable devant », « est dominé par » :

$f(t) \dots\dots\dots e^t$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$

$f(t) \dots\dots\dots \frac{e^t}{t}$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$

$f(t) \dots\dots\dots \frac{e^t}{t^2}$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$

Lorsque plusieurs réponses sont acceptables, vous donnerez la plus précise. Bien entendu, vous justifierez votre choix.

4. – Quelle est la limite de  $f(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  ?
5. – Explicitiez  $f'(t)$ .
6. – Dressez le tableau des variations de  $f$ .
7. – Explicitiez  $f''(t)$ .
8. – Montrez que l'équation  $f''(t) = 0$  possède deux solutions réelles : l'une est évidente, l'autre sera notée  $\alpha$ . Vous ne chercherez pas à calculer  $\alpha$ .
9. – Prouvez l'encadrement  $-\frac{1}{5} < \alpha < 0$ .
10. – Explicitiez le développement limité de  $f$  à l'ordre 3 au voisinage de 0. Que pouvez-vous en déduire concernant  $C_f$  ?
11. – Tracez la courbe représentative de  $f$ . Vous préciserez son allure au voisinage du point d'abscisse 1.

### Partie II

Au vu des expressions de  $f(t)$ ,  $f'(t)$  et  $f''(t)$ , nous nous proposons d'établir que l'assertion  $\mathcal{A}(n)$  suivante est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

Il existe un polynôme  $P_n$  tel que  $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{n+1}}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$

Vous allez raisonner par récurrence sur  $n$ .

**Remarque :** vous pouvez confondre polynôme et fonction polynomiale.

12. – Il est clair que  $\mathcal{A}(n)$  est vraie pour  $n \in \{0,1,2\}$  ; vous dresserez simplement un tableau donnant l'expression de  $P_n$  pour ces valeurs de  $n$ .
13. – Fixons  $n \in \mathbb{N}$ , et supposons l'assertion  $\mathcal{A}(n)$  acquise. Établissez l'assertion  $\mathcal{A}(n+1)$  ; vous déterminerez l'expression de  $P_{n+1}$  en fonction de  $P_n$  et  $P'_n$ .

Il résulte donc des questions 12 et 13 que l'assertion  $\mathcal{A}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

14. – Montrez que  $P_n$  a tous ses coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .
15. – Précisez le degré et le coefficient dominant de  $P_n$ .
16. – Donnez une expression simple de  $c_n = P_n(i)$ , où  $i$  est le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\frac{\pi}{2}$ .

### Partie III

Notons  $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t) dt$ . Ainsi,  $F$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en 0.

17. – Quel est le sens de variation de  $F$  ?

18. – Montrez que  $F(x)$  possède une limite  $\ell$  finie lorsque  $x$  tend vers  $-\infty$ . Vous ne cherchez pas à expliciter cette limite.

19. – Prouvez l'encadrement  $-1 \leq \ell \leq 0$ .

20. – Donnez une équation de la tangente à la courbe représentative de  $F$ , au point d'abscisse 0.

21. – Explicitiez le développement limité de  $F$  à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Nous nous proposons d'étudier le comportement de  $F(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Nous noterons

$$J(x) = \int_1^x \frac{te^t}{(1+t^2)^2} dt, \quad K(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt \quad \text{et} \quad L(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^4} dt.$$

22. – Prouvez l'existence d'une constante  $A$  telle que  $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$  pour tout réel  $x$ .

23. – Pour  $x \geq 1$ , placez les uns par rapport aux autres les réels 0,  $J(x)$  et  $K(x)$ .

24. – Avec une intégration par parties soigneusement justifiée, montrez que  $K(x) - 3L(x)$  est négligeable devant  $\frac{e^x}{x^2}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

25. – En découpant l'intervalle  $[1, x]$  sous la forme  $[1, x^{3/4}] \cup [x^{3/4}, x]$ , montrez que  $L(x)$  est négligeable devant  $\frac{e^x}{x^2}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

26. – En déduire un équivalent simple de  $F(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

27. – Exploitez les résultats des questions 17, 19, 20 et 26 pour donner l'allure de la courbe représentative de  $F$ .

## Problème 2

### Partie I

Notons  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  et  $\mathbf{D} : f \in E \mapsto f'$ . Il est clair que  $\mathbf{D}$  est un endomorphisme de  $E$ .

1. – Déterminez le noyau et l'image de  $\mathbf{D}$ .

Soient  $f_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t$ ,  $f_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$  et  $f_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ . Nous noterons  $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$  et  $G$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $\mathcal{B}$ .

Nous allons montrer que  $\mathcal{B}$  est une famille libre de vecteurs de  $E$ . Soient  $a, b$  et  $c$  des réels tels que  $af_1 + bf_2 + cf_3$  soit la fonction nulle.

2. – L'étudiante Antoinette observe que  $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$  pour tout réel  $t$ . Elle choisit (adroitement) trois valeurs de  $t$ , obtient un système de trois équations aux trois inconnues  $a, b$  et  $c$ , qu'elle résout ; il ne lui reste plus qu'à conclure. Faites comme elle !

3. – L'étudiante Lucie propose d'exploiter le développement limité à l'ordre 2 de la fonction  $af_1 + bf_2 + cf_3$  au voisinage de 0. Faites comme elle !

4. – L'étudiante Nicole décide de s'intéresser au comportement de  $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t)$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Faites comme elle !

La famille  $\mathcal{B}$  est donc une base de  $G$ , et ce sous-espace est de dimension 3.

5. – Montrez que  $G$  est stable par  $\mathbf{D}$ .

Nous noterons  $\widehat{\mathbf{D}}$  l'endomorphisme de  $G$  induit par  $\mathbf{D}$ .

6. – Déterminez la matrice  $M$  de  $\widehat{\mathbf{D}}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

7. – Calculez  $M^3$ .
8. – Montrez que  $M$  est inversible, et explicitez son inverse  $M^{-1}$ .
9. – Montrez que  $\widehat{D}$  est un automorphisme de  $G$ .
10. – Exprimez  $(\widehat{D})^{-1}$  en fonction de  $\widehat{D}$ .

## Partie II

Soient  $g$  et  $h$  deux éléments de  $G$ . Définissons  $\varphi(g, h) = g(0)h(0) + g'(0)h'(0) + g''(0)h''(0)$ .

11. – Dressez un tableau à trois lignes et quatre colonnes ; pour  $1 \leq i \leq 3$ , la ligne  $i$  présentera les valeurs de  $i$ ,  $f_i(0)$ ,  $f'_i(0)$  et  $f''_i(0)$  dans cet ordre. Vous ne ferez pas apparaître le détail des calculs sur votre copie.
12. – Montrez que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $G$ .
13. – La base  $\mathcal{B}$  est-elle orthogonale ?
14. – La base  $\mathcal{B}$  est-elle orthonormée ?

## Partie III

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation différentielle  $y''' = y$ , que nous noterons  $(\mathcal{E})$ . Une solution sur  $\mathbb{R}$  de  $(\mathcal{E})$  est une fonction  $f$  définie et trois fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , vérifiant  $f'''(t) = f(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

15. – Montrez que toute solution  $f$  de  $(\mathcal{E})$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
16. – Montrez que la fonction nulle est la seule solution polynomiale de  $(\mathcal{E})$ .

Notons  $\mathbf{T} = \mathbf{D}^3 - \mathbf{Id}$ , où  $\mathbf{Id}$  est l'identité de  $E$ , et  $\mathbf{D}^3 = \mathbf{D} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{D}$ . Le noyau de  $\mathbf{T}$  est donc l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E})$ .

17. – Montrez que  $G$  est contenu dans le noyau de  $\mathbf{T}$ .

Nous allons établir l'inclusion inverse ; ainsi,  $G$  sera exactement l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E})$ . Soit  $f$  une solution de  $(\mathcal{E})$  ; nous noterons  $g = f'' + f' + f$ .

18. – Montrez que  $g$  est solution de l'équation différentielle  $y' = y$ .
19. – Décrivez rapidement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y' - y = 0$ .
20. – Résolvez l'équation différentielle  $y'' + y' + y = 0$  ; vous donnerez une base de l'ensemble des solutions.
21. – Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Décrivez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y'' + y' + y = \lambda e^t$ .
22. – Et maintenant, concluez !

**FIN**

# BARÈME

- Ce barème est sur 100 points avec 51 points pour le Problème I et 49 points pour le Problème II.
- L'attention des correcteurs est attirée sur le fait que la qualité, bonne ou mauvaise, de la rédaction d'une question, peut influencer sur le nombre de points attribués.

# Problème 1

## Partie I

1. - 1
2. - 1
3. - 1+1+1
4. - 1
5. - 1
6. - 1
7. - 2
8. - 2
9. - 1
10. - 2 (DL) + 1 (interprétation)
11. - 1 (allure de la courbe) + 1 (allure au voisinage de 1)

Sous-total pour cette partie : 18 points

## Partie II

12. - 1
13. - 2+1
14. - 1
15. - 1+1
16. - 2

Sous-total pour cette partie : 9 points

## Partie III

17. - 1
18. - 2
19. - 1
20. - 1
21. - 1
22. - 2
23. - 2
24. - 3
25. - 6 (1 pour chaque majoration ; 2 pour dominer  $L_1(x)$ , 1 pour dominer  $L_2(x)$ , 1 pour conclure)
26. - 3
27. - 2

Sous-total pour cette partie : 24 points

**Total** pour ce problème : 51 points

## Problème 2

### Partie I

1. - 1+1
2. - 3
3. - 1 (partie régulière) + 1 (pour le petit  $o$ ) + 1 (unicité du DL) + 1 (résolution)
4. - 3
5. - 1 (linéarité) + 2 (résolution) + 1 (abstraction)
6. - 1
7. - 2
8. - 1 (invertibilité de  $M$ ) + 1 (valeur de  $M^{-1}$ )
9. - 1
10. - 1

Sous-total pour cette partie : 23 points

### Partie II

11. - 2 (moins un par erreur constatée)
12. - 1 (déf. produit scalaire) + 2 (détail des preuves banale) + 2 (preuve de “défini”)
13. - 2
14. - 1

Sous-total pour cette partie : 10 points

### Partie III

15. - 2
16. - 1
17. - 2
18. - 1 (dérivabilité) + 1 (calcul)
19. - 1 (structure de droite vectorielle non exigée)
20. - 3 (passage par les complexes non exigé)
21. - 2 (solution particulière) + 1 (solution générale)
22. - 2 (rédaction de la synthèse)

Sous-total pour cette partie : 16 points

**Total** pour ce problème : 49 points

**CORRIGÉ**



## Problème 1

1. — Lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$ ,  $e^{-t}$  tend vers  $0^+$  et  $1+t^2$  tend vers  $+\infty$ , donc  $\boxed{f(t) \text{ tend vers } 0^+}$ .
2. —  $C_f$  présente une asymptote d'équation  $y = 0$ ; comme  $f(t) > 0$  pour tout réel  $t$ , la courbe est entièrement au-dessus de cette asymptote.
3. —  $\boxed{f(t) \text{ est négligeable devant } e^t}$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  car  $\frac{f(t)}{e^t} = \frac{1}{1+t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ .
- $\boxed{f(t) \text{ est négligeable devant } \frac{e^t}{t}}$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  car  $\frac{f(t)}{e^t/t} = \frac{t}{1+t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ .
- $\boxed{f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^t}{t^2}}$  car  $\frac{f(t)}{e^t/t^2} = \frac{t^2}{1+t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$ .
4. — Par raison de croissances comparées,  $\frac{e^t}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ . Le troisième résultat de la question 3 montre que  $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ .
5. —  $f'(t) = \frac{(1+t^2)e^t - 2te^t}{(1+t^2)^2} = \frac{(t^2 - 2t + 1)e^t}{(1+t^2)^2} = \boxed{\frac{(t-1)^2 e^t}{(1+t^2)^2}}$ .
6. — Il est clair que  $f'(t) \geq 0$  pour tout réel  $t$ , l'inégalité étant stricte sauf pour  $t = 1$ . Donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Avec les résultats des questions 1 et 4, on peut dresser le tableau de variation ci-contre.
- |        |           |                    |
|--------|-----------|--------------------|
| $t$    | $-\infty$ | $+\infty$          |
| $f(t)$ | $0^+$     | $\nearrow +\infty$ |
7. — Notons  $u(t) = (t-1)^2 e^t$  et  $v(t) = 1+t^2$ . Alors  $f' = \frac{u}{v^2}$ , donc :  $f'' = \frac{v^2 u' - 2v v' u}{v^4} = \frac{v u' - 2v' u}{v^3}$ .  
Or  $u'(t) = 2(t-1)e^t + (t-1)^2 e^t = (t^2 - 1)e^t$  et  $v'(t) = 2t$ ; nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{(1+t^2)(t^2-1)e^t - 4t(t-1)^2 e^t}{(1+t^2)^3} = \frac{(t^3 + t^2 + t + 1 - 4t^2 + 4t)(t-1)e^t}{(1+t^2)^3} \\ &= \frac{(t^3 - 3t^2 + 5t + 1)(t-1)e^t}{(1+t^2)^3} \end{aligned}$$

8. — La solution évidente est  $t_1 = 1$ . Observons les variations sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $\psi : t \mapsto t^3 - 3t^2 + 5t + 1$ . Nous avons  $\psi'(t) = 3t^2 - 6t + 5 = 3(t-1)^2 + 2 > 0$ , donc  $\psi$  est strictement croissante. Comme elle est continue, elle réalise une bijection de  $\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$  sur  $]\lim_{-\infty} \psi, \lim_{+\infty} \psi[ = ]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$ . Par conséquent,  $\psi$  s'annule une fois et une seule sur  $\mathbb{R}$ ; ceci nous donne la deuxième solution de l'équation  $f''(t) = 0$ .
9. — Nous remarquons que  $\psi(-1/5) = (-1/5)^3 - 3(-1/5)^2 + 5(-1/5) + 1 = -1/125 - 3/25 < 0$ , tandis que  $\psi(0) = 1 > 0$ . Le TVI affirme que  $\psi$  s'annule dans l'intervalle  $] -1/5, 0[$ , d'où l'encadrement demandé.

10. — Utilisons les  $DL_3(0)$  de  $\exp$  et de  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  :

$$f(t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) \times (1 - t^2 + o(t^3)) = \boxed{1 + t - \frac{t^2}{2} - \frac{5t^3}{6} + o(t^3)}$$

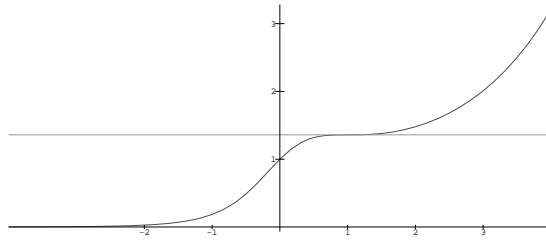
Nous en déduisons que la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse 0 a pour équation  $y = x + 1$ , et que  $C_f$  se trouve au-dessous de cette tangente.

11. — La courbe représentative représentée à la figure 1 a été obtenue avec le *script* Maple suivant :

```
f := t -> exp(t)/(1+t^2);
plot([f,exp(1)/2],-4..4,scaling=constrained);
```

En vue de son incorporation dans le présent document, j'ai inséré (avant le `plot`) la commande suivante, pour « exporter » le tracé au format *PostScript* :

```
plotsetup(ps,plotoutput='pb1a.ps',
plotoptions='portrait,noborder,height=1000,width=1000');
```

Figure 1 : courbe représentative de  $f$ 

$f''$  s'annule en changeant de signe, au voisinage de 1 ; donc le point d'abscisse 1 de  $\mathcal{C}_f$  est un point d'inflexion : la courbe traverse sa tangente en ce point.

**12.** – Immédiat, avec les résultats des questions **5** et **7** :

$n$	0	1	2
$P_n$	1	$X^2 - 2X + 1$	$X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 4X - 1$

**13.** – Nous partons de l'égalité  $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{n+1}}$  ; par dérivation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(t) &= \frac{d}{dt}(f^{(n)}(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{n+1}}\right) \\ &= \frac{(1+t^2)^{n+1}(P_n'(t)e^t + P_n(t)e^t) - 2(n+1)t(1+t^2)^n P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{2(n+1)}} \\ &= \left((1+t^2)(P_n'(t) + P_n(t)) - 2(n+1)tP_n(t)\right) \frac{e^t}{(1+t^2)^{n+2}} \end{aligned}$$

Notons  $P_{n+1} : t \in \mathbb{R} \mapsto (1+t^2)P_n'(t) + (t^2 - 2(n+1)t + 1)P_n(t)$  : il est clair que  $P_{n+1}$  est une fonction polynôme, et l'on a  $f^{(n+1)}(t) = \frac{P_{n+1}(t)e^t}{(1+t^2)^{(n+1)+1}}$  pour tout réel  $t$ . Traduite en termes de polynômes, l'égalité définissant  $P_{n+1}$  devient  $\boxed{P_{n+1} = (1+X^2)P_n' + (X^2 - 2(n+1)X + 1)P_n}$ .

**14.** – Raisonnons par récurrence. Comme  $P_0 = 1$ , l'assertion est vérifiée au rang 0. Supposons-la acquise au rang  $n$  : alors  $P_n'$  est elle aussi une fonction polynôme dont tous les coefficients sont dans  $\mathbb{Z}$  ; il en est de même de  $1+X^2$  et de  $X^2 - 2(n+1)X + 1$ . Par produit et somme, il en est de même de  $P_{n+1}$ . Par récurrence, l'assertion est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**15.** – Au vu des expressions de  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ , il semble raisonnable de noter  $\mathcal{C}(n)$  l'assertion suivante :

$$\boxed{P_n \text{ est unitaire de degré } 2n}$$

$\mathcal{C}(0)$  est vraie. Supposons  $\mathcal{C}(n)$  acquise. Alors  $(1+X^2)P_n'$  est de degré strictement inférieur à  $2n+2$ , tandis que  $(X^2 - 2(n+1)X + 1)P_n$  est unitaire de degré  $2n+2$ . Donc  $P_{n+1}$  est unitaire de degré  $2n+2 = 2(n+1)$ , ce qui établit  $\mathcal{C}(n+1)$  et termine la démonstration par récurrence.

**16.** – Nous avons  $c_0 = P_0(i) = 1$ , et  $c_{n+1} = P_{n+1}(i) = (1+i^2)P_n'(i) + (i^2 - 2(n+1)i + 1)P_n(i) = -2(n+1)ic_n$ . Les  $c_n$  sont donc tous non nuls ; ceci autorise le télescopage suivant (on effectue, à la dernière étape, le changement d'indice  $k' = k + 1$ ) :

$$c_n = c_0 \times \prod_{k=0}^{n-1} \frac{c_{k+1}}{c_k} = \prod_{k=0}^{n-1} (-2(k+1)i) = (-2i)^n \prod_{k=0}^{n-1} (k+1) = (-2i)^n \prod_{k=1}^n k = \boxed{(-2i)^n n!}$$

**17.** –  $F' = f$  ne prend que des valeurs strictement positives, donc  $\boxed{F \text{ est strictement croissante}}$ .

**18.** — Il suffit de montrer que  $F$  est minorée. Il est clair que  $f(t) < e^t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Alors, pour  $x < 0$  :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = - \int_x^0 f(t) dt \geq - \int_x^0 e^t dt = -[e^t]_x^0 = -1 + e^x > -1$$

Ce qui termine la preuve, en utilisant le théorème de la limite monotone.

**19.** — Comme  $F$  est croissante, on a  $F(x) \leq F(0) = 0$  pour  $x \leq 0$ . L'encadrement  $-1 < F(x) \leq 0$  nous donne alors  $\boxed{-1 \leq \ell \leq 0}$  par passage à la limite.

**20.** —  $F'(0) = f(0) = 1$  ; comme  $F(0) = 0$ , l'équation demandée est  $\boxed{y = x}$ .

**21.** — Il suffit d'intégrer terme à terme le  $DL_3$  établi à la question **10**, en n'oubliant pas de prendre en compte la valeur de  $F(0)$  :

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(t) dt = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$$

**22.** — *Méthode 1* : notons  $\Phi : x \in \mathbb{R} \mapsto F(x) - f(x) - 2J(x)$ . Alors :

$$\Phi'(x) = F'(x) - f'(x) - 2J'(x) = \frac{e^x}{1+x^2} - \frac{(x-1)^2 e^x}{(1+x^2)^2} - \frac{2xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2 - x^2 + 2x - 1 - 2x)e^x}{(1+x^2)^2} = 0$$

Ceci montre que  $\Phi$  est constante. Il suffit de noter  $A$  sa valeur constante pour avoir le résultat.

*Méthode 2* : appliquons une IPP à l'intégrale  $F(x)$ . Les fonctions  $u : t \mapsto e^t$  et  $v : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ . Ceci autorise le calcul suivant :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \frac{e^t}{1+t^2} dt = \int_0^x u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_0^x - \int_0^x u(t)v'(t) dt \\ &= [f(t)]_0^x - \int_0^x e^t \left( -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \right) dt = f(x) - f(0) + 2 \int_0^x \frac{te^t}{(1+t^2)^2} dt \\ &= f(x) - 1 + 2(J(x) - J(0)) = f(x) - 1 - 2J(0) + 2J(x) \end{aligned}$$

Ce qui établit le résultat demandé, avec  $\boxed{A = -1 - 2J(0)}$ .

**23.** —  $J(x) \geq 0$  est clair. Par ailleurs, on a certainement  $1 + t^2 \geq t^2$ , donc  $\frac{t}{(1+t^2)^2} \leq \frac{t}{t^4} = \frac{1}{t^3}$

puis  $\frac{te^t}{(1+t^2)^2} \leq \frac{e^t}{t^3}$  pour  $t \geq 1$  ; par intégration sur  $[1, x]$ , on obtient  $J(x) \leq K(x)$ . Ainsi

$$\boxed{0 \leq J(x) \leq K(x)}.$$

**24.** — Soit  $x > 1$ . Les fonctions  $\varphi : t \in [1, x] \mapsto e^t$  et  $\psi : t \in [1, x] \mapsto \frac{1}{t^3}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ . Ceci justifie l'IPP suivante :

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt = \int_1^x \varphi'(t)\psi(t) dt = [\varphi(t)\psi(t)]_1^x - \int_1^x \varphi(t)\psi'(t) dt \\ &= \left[ \frac{e^t}{t^3} \right]_1^x - \int_1^x e^t \left( -\frac{3}{t^4} \right) dt = \frac{e^x}{x^3} - e + 3 \int_1^x \frac{e^t}{t^4} dt = \frac{e^x}{x^3} - e + 3L(x) \end{aligned}$$

Ainsi  $K(x) - 3L(x) = \frac{e^x}{x^3} - e$ , quantité qui est manifestement négligeable devant  $\frac{e^x}{x^2}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**25.** — Remarquons que le point  $\xi = x^{3/4}$  en lequel l'énoncé propose d'effectuer la coupure se trouve effectivement dans l'intervalle  $[1, x]$  puisque  $x \geq 1$ . Notant  $L_1(x) = \int_1^\xi \frac{e^t}{t^4} dt$  et  $L_2(x) = \int_\xi^x \frac{e^t}{t^4} dt$ ,

nous aurons  $L(x) = L_1(x) + L_2(x)$ . Étudions chacune de ces intégrales :

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \int_1^\xi \frac{e^t}{t^4} dt \leq \int_1^\xi \frac{e^\xi}{t^4} dt = e^\xi \int_1^\xi \frac{dt}{t^4} = e^\xi \left[ -\frac{1}{3t^3} \right]_1^\xi = e^\xi \left( -\frac{1}{3\xi^3} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{e^\xi}{3} \left( 1 - \frac{1}{\xi^3} \right) = \frac{e^x}{x^2} \times \frac{x^2}{3e^{x-\xi}} \left( 1 - \frac{1}{\xi^3} \right) \\ L_2(x) &= \int_\xi^x \frac{e^t}{t^4} dt \leq \int_\xi^x \frac{e^x}{t^4} dt = e^x \int_\xi^x \frac{1}{t^4} dt = e^x \left[ -\frac{1}{3t^3} \right]_\xi^x = e^x \left( \frac{1}{3\xi^3} - \frac{1}{3x^3} \right) \\ &= \frac{e^x}{x^2} \times \frac{x^2}{3} \left( \frac{1}{\xi^3} - \frac{1}{x^3} \right) = \frac{e^x}{x^2} \left( \frac{1}{3\xi^3} - \frac{1}{3x^3} \right) \end{aligned}$$

Remarquons que  $\xi = x^{3/4}$  est un  $o(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ; donc  $x - \xi \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ , d'où :

$$\frac{x^2}{3e^{x-\xi}} = \frac{x^2}{3(x-\xi)^2} \times \frac{(x-\xi)^2}{e^{x-\xi}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3} \times \frac{(x-\xi)^2}{e^{x-\xi}}$$

L'équivalent signalé plus haut implique  $x - \xi \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$  ; alors, par raison de croissances comparées,

$\frac{(x-\xi)^2}{e^{x-\xi}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$  ; donc  $\frac{x^2}{3e^{x-\xi}}$  est un  $o(1)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . D'autre part,  $1 - \frac{1}{x^{9/4}}$  est un

$\mathcal{O}(1)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ . Nous pouvons donc affirmer que  $L_1(x)$  est négligeable devant  $\frac{e^x}{x^2}$  dans les mêmes conditions.

De même :  $\frac{1}{3x^{1/4}} - \frac{1}{3x}$  est un  $o(1)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ; donc  $L_2(x)$  est négligeable devant  $\frac{e^x}{x^2}$  dans les mêmes conditions.

Finalement,  $L(x) = L_1(x) + L_2(x)$  est négligeable devant  $\frac{e^x}{x^2}$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**26.** —  $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$ . Or  $f(x) = \frac{e^x}{1+x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}$  ; la constante  $A$  est un  $o\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$ . Enfin,  $0 \leq J(x) \leq K(x)$  implique que  $J(x)$  est dominé par  $K(x)$  ; mais les résultats des questions **24** et **25** montrent que  $K(x)$  est un  $o\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$ . Finalement,  $\boxed{F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}}$ .

**27.** — La courbe représentative de  $F$  est convexe puisque  $F' = f$  est croissante. Elle possède une asymptote d'équation  $y = k$  (avec  $k \approx -0.62$ ) ; cette asymptote apparaît sur la figure.

L'équivalent obtenu à la question **26** montre que la courbe possède une direction asymptotique « verticale » lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

La courbe passe par l'origine puisque  $F(0) = 0$  ; et la tangente en ce point a pour pente  $F'(0) = f(0) = 1$ , donc son équation est  $y = x$ .

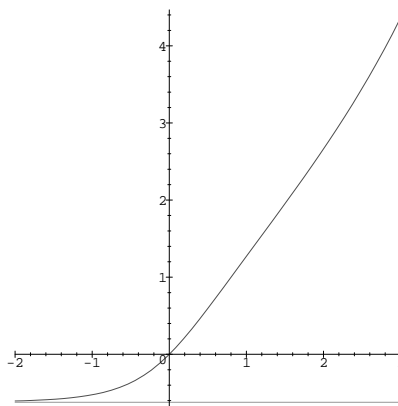


Figure 2 : courbe représentative de  $F$

## Problème 2

1. — Le noyau de  $\mathbf{D}$  est l'ensemble des fonctions constantes. L'image de  $\mathbf{D}$  est l'espace  $E$  entier : en effet, soit  $f \in E$  ;  $f$  est continue, donc possède des primitives. Soit  $F$  l'une d'elles : alors  $\mathbf{D}(F) = f$ . Donc  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , ce qui en fait un élément de  $E$  ; et c'est un antécédent de  $f$ , ce qui montre que  $\mathbf{D}$  est surjectif.

2. — Il est clair que  $t = 0$  est un bon choix ; nous prendrons également  $u = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$  et  $v = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} = -u$ .

Écrivons le système correspondant :

$$\begin{cases} af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0 \\ af_1(u) + bf_2(u) + cf_3(u) = 0 \\ af_1(v) + bf_2(v) + cf_3(v) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + c = 0 \\ ae^u + be^{-u/2} = 0 \\ ae^{-u} + be^{u/2} = 0 \end{cases}$$

Le déterminant du système formé par les deux dernières équations est  $e^{3u/2} - e^{-3u/2} = 2 \operatorname{sh}(3u/2)$  ; comme  $u$  n'est pas nul, ce déterminant n'est pas nul, donc la seule solution de ce système homogène est  $a = b = 0$  ; en reportant dans la première égalité, nous obtenons  $c = 0$ , ce qui termine la preuve.

3. — Nous avons :

$$\begin{aligned} (af_1 + bf_2 + cf_3)(t) &= af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = ae^t + be^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + ce^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= a\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) + b\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2)\right) \times \left(\frac{t\sqrt{3}}{2} + o(t^2)\right) \\ &\quad + c\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} + o(t^2)\right) \times \left(1 - \frac{3t^2}{8} + o(t^2)\right) \\ &= a + at + \frac{at^2}{2} + \frac{bt\sqrt{3}}{2} - \frac{bt^2\sqrt{3}}{4} + c - \frac{ct}{2} - \frac{ct^2}{4} + o(t^2) \\ &= (a + c) + \left(a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\right)t + \left(\frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{4} - \frac{c}{4}\right)t^2 + o(t^2) \end{aligned}$$

L'unicité du DL nous donne le système :

$$\begin{cases} a & +c & = 0 & \mathcal{L}_1 \\ a & +\frac{b\sqrt{3}}{2} & -\frac{c}{2} & = 0 & \mathcal{L}_2 \\ \frac{a}{2} & -\frac{b\sqrt{3}}{4} & -\frac{c}{4} & = 0 & \mathcal{L}_3 \end{cases}$$

En observant  $\mathcal{L}_2 - 2\mathcal{L}_3$ , nous obtenons  $b = 0$ . Par ailleurs,  $\mathcal{L}_2 + 2\mathcal{L}_3$  nous donne  $2a - c = 0$ , ce qui, avec  $\mathcal{L}_1$ , nous donne  $a = c = 0$ . Conclusion :  $a = b = c = 0$ , et la famille  $\mathcal{B}$  est libre.

4. — Lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ ,  $f_2(t)$  et  $f_3(t)$  tendent vers 0 tandis que  $f_1(t)$  tend vers  $+\infty$ . Ceci impose  $\boxed{a = 0}$ . Nous avons donc  $bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ , soit  $be^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + ce^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0$  ou encore  $b \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + c \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = 0$  pour tout réel  $t$ . Les parités respectives de  $\sin$  et  $\cos$  imposent alors  $\boxed{b = 0}$  et  $\boxed{c = 0}$ .

5. — Par linéarité, il suffit de prouver que  $\mathbf{D}(f_1)$ ,  $\mathbf{D}(f_2)$  et  $\mathbf{D}(f_3)$  sont toutes trois dans  $G$ . Or :

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}(f_1))(t) &= f_1'(t) = e^t = f_1(t) \\ (\mathbf{D}(f_2))(t) &= f_2'(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}f_2(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3(t) \\ (\mathbf{D}(f_3))(t) &= f_3'(t) = -\frac{1}{2}e^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2(t) - \frac{1}{2}f_3(t) \end{aligned}$$

Ces égalités valent pour tout réel  $t$ . Nous en déduisons  $\mathbf{D}(f_1) = f_1$ ,  $\mathbf{D}(f_2) = -\frac{1}{2}f_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}f_3$  et  $\mathbf{D}(f_3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}f_2 - \frac{1}{2}f_3$  ce qui termine la preuve.

6. – Il suffit d'appliquer le résultat de la question 5 :  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ .

7. – Nous obtenons successivement  $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$  et  $M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

8. – Nous avons établi  $M^3 = I_3$  : donc  $M \cdot M^2 = M^2 \cdot M = I_3$ , ce qui montre que  $M$  est inversible, et que  $M^{-1} = M^2$ .

9. – Nous savons déjà (question 5) que  $\widehat{\mathbf{D}}$  est un endomorphisme de  $G$ . La matrice de  $\widehat{\mathbf{D}}$  dans la base  $\mathcal{B}$  est inversible, donc  $\widehat{\mathbf{D}}$  est un automorphisme de  $G$ .

10. – La relation  $M^{-1} = M^2$  nous donne immédiatement  $\widehat{\mathbf{D}}^{-1} = \widehat{\mathbf{D}}^2$ .

11. – Voici le tableau demandé :

$i$	$f_i(0)$	$f'_i(0)$	$f''_i(0)$
1	1	1	1
2	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
3	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

12. – Linéarité, symétrie, positivité sont claires. Il nous reste à montrer que l'égalité  $\varphi(g, g) = 0$  implique que  $g$  est la fonction nulle. Soient  $a, b$  et  $c$  les coordonnées de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $G$  : ainsi  $g = af_1 + bf_2 + cf_3$ . Alors :

$$\begin{aligned} (g(0))^2 &= (a + c)^2 \\ (g'(0))^2 &= \left(a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\right)^2 \\ (g''(0))^2 &= \left(a - \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Or  $\varphi(g, g) = (g(0))^2 + (g'(0))^2 + (g''(0))^2$  ; l'égalité  $\varphi(g, g) = 0$  implique que les trois carrés sont nuls ; donc  $a + c = 0$ ,  $a + \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} = 0$  et  $a - \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{c}{2} = 0$ . Nous retrouvons le système établi et résolu à la question 3 ; donc  $a = b = c = 0$  ce qui termine la preuve.

Remarquons que l'étudiante Lucie, voyant que  $g(0)$ ,  $g'(0)$  et  $g''(0)$  sont tous trois nuls, peut tout de suite conclure...

13. – Nous vérifions sans peine que  $\varphi(f_1, f_2)$ ,  $\varphi(f_1, f_3)$  et  $\varphi(f_2, f_3)$  sont tous trois nuls. Donc la base  $\mathcal{B}$  est orthogonale.

14. – Nous constatons que  $\varphi(f_1, f_1) = 3$ . Donc la base  $\mathcal{B}$  n'est pas orthonormée.

15. – Par définition,  $f$  est de classe  $\mathcal{D}^3$ . Supposons  $f$  de classe  $\mathcal{D}^{3k}$  : alors  $f''' = f$  montre que  $f'''$  est de classe  $\mathcal{D}^{3k}$ , donc  $f$  est de classe  $\mathcal{D}^{3k+3}$ . Par récurrence, nous obtenons que  $f$  est de classe  $\mathcal{D}^{3k}$  pour tout  $k \geq 1$ , donc  $f$  de classe  $\mathcal{D}^\infty$ , ce qui est la même chose qu'être de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

16. – Que la fonction nulle soit une solution polynomiale de  $(\mathcal{E})$  est une conséquence de la linéarité de cette équation. C'est la seule : si  $f$  est une fonction polynôme autre que la fonction nulle, alors, notant  $n$  son degré, nous aurons  $\deg(f''') \leq n - 3$ , donc  $f'''$  ne peut être égale à  $f$ .

17. – Ceci est une conséquence immédiate de l'égalité établie à la question 7 : chaque élément de  $G$  est invariant par  $\widehat{\mathbf{D}}^3$ , donc par  $\mathbf{D}^3$ , ce qui revient à dire qu'il appartient au noyau de  $\mathbf{T}$ .

**18.** —  $f$  est de classe  $\mathcal{D}^3$ , donc  $f$ ,  $f'$  et  $f''$  sont dérivables ; alors  $g$  est dérivable en tant que somme de fonctions qui le sont.  $g' = (f'' + f' + f)' = f''' + f'' + f' = f + f'' + f' = f'' + f' + f = g$  puisque  $f''' = f$ . Donc  $g$  est solution de l'équation différentielle  $y' = y$ .

**19.** — C'est la droite vectorielle engendrée par  $f_1$ .

**20.** — Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, à coefficients constants et homogène. La théorie nous dit de résoudre d'abord l'équation caractéristique associée  $r^2 + r + 1 = 0$  : le discriminant de celle-ci est  $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$  ; donc cette équation possède deux solutions complexes conjuguées  $r_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$  et  $r_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ . Les solutions à *valeurs complexes* de l'équation différentielle  $y'' + y' + y = 0$  sont donc les fonctions de la forme suivante :

$$t \mapsto \lambda \exp\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \exp\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}t\right)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des complexes arbitraires. Mais nous savons aussi que les solutions à *valeurs réelles* de cette même équation sont les fonctions de la forme suivante :

$$t \mapsto \alpha e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \beta e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) = \alpha f_2(t) + \beta f_3(t)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels arbitraires ; une autre façon de le dire est que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $y'' + y' + y = 0$  est le plan vectoriel engendré par  $f_2$  et  $f_3$  : donc  $(f_2, f_3)$  est une base de cet ensemble.

**21.** — Il nous suffit de trouver une solution particulière de cette équation différentielle. Le second membre est une « exponentielle polynôme », et le coefficient de  $t$  dans l'exponentielle (soit 1) n'est pas solution de l'équation caractéristique ; la théorie nous dit de chercher une solution  $h$  de la forme  $t \mapsto \mu e^t$  ; alors  $h = h' = h''$ , donc  $h'' + h' + h$  est la fonction  $t \mapsto 3\mu e^t$ , et il est clair qu'il suffit de prendre  $\mu = \lambda/3$ . Donc les solutions de l'équation différentielle  $y'' + y' + y = \lambda e^t$  sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \alpha e^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \beta e^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\lambda}{3} e^t$$

**22.** — Des questions **18** et **19**, nous déduisons qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $g = \lambda f_1$ . Ainsi, de par la définition de  $g$ , la fonction  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y'' + y' + y = \lambda e^t$ . Le résultat de la question **21** nous permet d'affirmer l'existence de réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $f = \frac{\lambda}{3} f_1 + \alpha f_2 + \beta f_3$  : ceci montre bien l'appartenance de  $f$  à  $G$ .

**FIN**