SUJET

Problème 1

Partie I

Soit ℓ un réel. On note f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = \ell$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{I}_n$ l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$.

1. – Quelle valeur faut-il donner à ℓ pour que f soit continue à droite en 0 ?

On suppose désormais que ℓ a cette valeur.

2. – Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire : dérivable, et à dérivée continue) sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et explicitez la dérivée de f à droite en 0.

3. – Soit $n \geqslant 1$. Montrez que, dans l'intervalle $\mathcal{I}_n$, l'équation $x \cos x = \sin x$ possède une et une seule solution, que l'on notera x_n.

4. – Déterminez un équivalent *très simple* de x_n, lorsque n tend vers l'infini.

5. – Décrivez rapidement les variations de f dans l'intervalle $\mathcal{I}_0$, puis dans les intervalles $\mathcal{I}_{2n-1}$ et $\mathcal{I}_{2n}$ pour $n \geqslant 1$.

6. – Déterminez l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II

7. – Justifier l'existence de l'application F définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = F((n+1)\pi) - F(n\pi) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,dt$.

8. – Quel est le signe de u_n ?

9. – Montrez que la suite de terme général $|u_n|$ est décroissante et converge vers 0.

10. – Que pouvez-vous dire des suites de termes généraux respectifs $F(2n\pi)$ et $F((2n+1)\pi)$?

11. – Montrez que la suite de terme général $F(n\pi)$ converge vers une limite μ (que l'on ne cherchera pas à déterminer).

12. – Justifiez l'encadrement $0 \leqslant \mu \leqslant \pi$.

13. – Préciser la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, si toutefois cette limite existe.

On peut établir la formule $\mu = \frac{\pi}{2}$, mais c'est une autre histoire.

Partie III

Il est clair que la restriction g de f à l'intervalle $]0, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle ; on pourrait d'ailleurs prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ mais ce n'est pas notre objectif. On se propose simplement d'établir quelques résultats concernant la dérivée n-ième de g, notée $g^{(n)}$. En particulier, $g^{(0)}$ désigne g elle-même. On identifie un polynôme P et la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ qui lui est naturellement associée. Chaque polynôme sera écrit selon les puissances décroissantes de X.

14. – Explicitez $g''(x)$ pour $x > 0$.

Au vu des expressions de $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$, on se propose d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

> Il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que, pour tout $x > 0$:
>
> $$g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)\sin^{(n)} x + Q_n(x)\sin^{(n+1)} x}{x^{n+1}}$$

Vous allez raisonner par récurrence sur n.

15. – Il est clair que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0,1,2\}$; vous dresserez simplement un tableau donnant les expressions de P_n et Q_n pour ces valeurs de n. Voyez-vous apparaître une relation *simple* entre P_n et Q_n ?

16. – On fixe $n \in \mathbb{N}$, et on suppose l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise. Établissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$; vous déterminerez des expressions de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.

Il résulte donc des questions **15** et **16** que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

17. – Montrez que P_n et Q_n ont tous leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$; précisez le degré, la parité, et le coefficient dominant de ces polynômes.

18. – Utilisez les formules établies à la question **16** pour expliciter P_3 et Q_3.

19. – Deux polynômes U et V vérifient $U(x)\sin x + V(x)\cos x = 0$ pour tout $x > 0$. Montrez que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.

20. – En partant de la relation $xg(x) = \sin x$ et en appliquant la formule de Leibniz, ainsi que le résultat de la question précédente, mettez en évidence deux nouvelles relations liant P_n, Q_n, P_{n+1} et Q_{n+1}.

21. – Justifiez alors la relation $P'_n = Q_n$, et montrez que P_n est solution d'une équation différentielle du second ordre *très simple*, que l'on notera $\mathcal{E}_n$.

22. – Il est clair que l'application $\Phi : T \mapsto T + T''$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Montrez que Φ induit un automorphisme Φ_n du sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes de degré n au plus ; montrez ensuite que Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Il résulte de ceci que P_n est l'unique solution polynomiale de l'équation différentielle $\mathcal{E}_n$.

23. – $n \in \mathbb{N}$ est fixé, et p désigne la partie entière de $n/2$. Justifiez l'existence d'une famille $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant p}$ de réels vérifiant $P_n = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant p} a_k X^{n-2k}$ et déterminez une expression de a_k faisant intervenir des factorielles et/ou des puissances, mais débarrassée de tout signe $\prod$.

24. – Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminez les solutions réelles de l'équation différentielle $y''+y = x^n$.

Problème 2

On note $p : x \mapsto e^x = \exp(x)$, $q : x \mapsto e^{2x} = \exp(2x)$ et $r : x \mapsto e^{x^2} = \exp(x^2)$. On note $\mathcal{B} = (p, q, r)$ et $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B}$.

La partie IV est indépendante des autres parties.

Partie I

On se propose de prouver que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$, au moyen de diverses méthodes. De par la définition de $\mathcal{E}$, il nous suffit de montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre ; soit donc a, b et c trois réels tels que $ap + bq + cr = \mathbf{0}$ (où $\mathbf{0}$ désigne la fonction nulle).

1. – L'étudiant Antoine a évalué l'expression $(ap + bq + cr)(x)$ pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$. Suivez sa démarche en l'expliquant, et concluez.

2. – Antoine a utilisé une propriété du nombre e ; laquelle ? Sauriez-vous justifier cette propriété autrement que par un argument du genre « *tout le monde sait bien que* $e \approx 2.71828$ » ?

3. – L'étudiant Nicolas a observé le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de l'application $ap + bq + cr$. Faites comme lui et concluez.

4. – L'étudiant Luc a eu une autre idée : il s'est intéressé au comportement de chacune des trois fonctions p, q, r au voisinage de $+\infty$. Reconstituez sa méthode et concluez.

5. – Au fait : quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

On note ψ l'application qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe le triplet de réels $\big(f(0), f'(0), f(1)\big)$.

6. – Prouvez que ψ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

7. – Soit $f = ap + bq + cr$ un élément de $\mathcal{E}$. Exprimez a, b et c en fonction de $f(0)$, $f'(0)$ et $f(1)$.

Partie II

On note φ l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe $\varphi(f) = Ap + Bq + Cr$ où

$$\begin{cases} A = \dfrac{2}{e-1} f(0) + f'(0) + \dfrac{2}{e(e-1)} f(1) \\ B = -\dfrac{1}{e-1} f(0) - \dfrac{1}{e(e-1)} f(1) \\ C = \dfrac{e-2}{e-1} f(0) - f'(0) - \dfrac{1}{e(e-1)} f(1) \end{cases}$$

8. – On note θ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $\theta(a, b, c) = (a, b, -c)$. Montrez que $\varphi = \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi$. En déduire que φ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

9. – Exprimez $\varphi(p)$, $\varphi(q)$ et $\varphi(r)$ en fonction de p, q et r.

10. – Écrivez la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$.

11. – Déterminez $\varphi \circ \varphi$ et M^2. Que pouvez-vous dire de φ ?

Partie III

12. – On note $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ invariants par f. Montrez que $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : f(1) = 0\}$. En déduire que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$; déterminez une équation de $\mathcal{P}$ dans la base $\mathcal{B}$; prouvez que $\mathcal{P}$ est de dimension deux ; exhibez une base (e_1, e_2) de $\mathcal{P}$.

13. – On note $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = -f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ transformés en leur opposé par f. Montrez que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$; prouvez que $\mathcal{D}$ est de dimension un, et déterminez des équations de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$. Exhibez une base (e_3) de $\mathcal{D}$, et donnez une caractérisation des éléments de $\mathcal{D}$.

14. – Montrez que $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.

15. – Justifiez l'affirmation suivante : $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathcal{E}$.

16. – Quelle est la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}$? Caractérisez géométriquement φ.

Partie IV

On se propose de développer ici l'idée suivie par l'étudiant Luc dans la première partie (question **4**). On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels, $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont le terme constant est nul ; pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n. On identifie un polynôme P et la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ qui lui est naturellement associée.

17. – Montrez que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Quelle est la dimension de $\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n[X]$?

18. – Soit $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ vérifiant la condition suivante :

pour $1 \leqslant k < q$, $P_{k+1}(x) - P_k(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

On note $f_k = \exp \circ P_k$ l'application qui, à $x \in \mathbb{R}$, associe $f_k(x) = e^{P_k(x)} = \exp\big(P_k(x)\big)$. Montrez que la famille $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ est libre.

FIN

BARÈME

• Ce barême est sur 100 points avec 52 points pour le Problème I et 48 points pour le Problème II.

• L'attention des correcteurs est attirée sur le fait que la qualité, bonne ou mauvaise, de la rédaction d'une question, peut influer sur le nombre de points attribués.

Problème 1

Partie I

1. - 1 point	
2. - 1+2 points	1 point pour la valeur de $f'_d(0)$; 2 points pour la justification de la classe $\mathcal{C}^1$.
3. - 1+1 points	1 point pour la méthode ; 1 point pour son application correcte.
4. - 2 points	On veut privilégier les candidats qui donneront une réponse brève.
5. - 1+2+1 points	1 point pour l'étude sur $\mathcal{I}_0$; 2 points pour l'étude sur l'un des intervalles $\mathcal{I}_{2n-1}$ et $\mathcal{I}_{2n}$, 1 point pour l'autre étude.
6. - 1 point	

Sous-total pour cette partie : 13 points

Partie II

7. - 1 point	
8. - 1 point	
9. - 3 points	Décroissance : 2 points ; valeur de la limite : 1 point.
10. - 2 points	1 point par comportement de suite.
11. - 3 points	1 point pour la justification du fait que ces suites sont adjacentes ; 2 points pour la conclusion concernant la suite de terme général $F(n\pi)$.
12. - 2 points	1 point par côté de l'encadrement.
13. - 3 points	

Sous-total pour cette partie : 15 points

Partie III

14. - 1 point	
15. - 1 point	
16. - 2 points	
17. - 3 points	1 point pour l'appartenance des coefficients à $\mathbb{Z}$; 2 points pour le reste.
18. - 1 point	
19. - 3 points	
20. - 2 points	
21. - 2 points	1 point pour chaque relation.
22. - 2+2 points	Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$: 2 points.
23. - 3 points	1 point pour l'application correcte de la formule de Leibniz ; 1 point pour la séparation et l'identification ; 1 point pour l'écriture correcte de P_n.
24. - 2 points	

Sous-total pour cette partie : 24 points

Total pour ce problème : 52 points

Problème 2

Partie I

1. - 2 points	
2. - 1+1 points	Énoncé de la propriété : 1 point. Preuve : 2 points.
3. - 3 points	Écriture correcte du DL : 1 point. Invocation de l'unicité du DL : 1 point. Résolution du système : 1 point.
4. - 3 points	Mise en évidence de l'échelonnement : 1 point ; obtention de $c = 0$: 1 point ; obtention de $b = 0$ et $a = 0$: 1 point.
5. - 1 point	
6. - 2 points	Preuve de l'injectivité (ou de la surjectivité) : 1 point. Reste du raisonnement : 1 point.
7. - 3 points	1 point si la méthode du pivot est bien appliquée, mais avec erreurs de calculs ; 3 points si aucun reproche.

Sous-total pour cette partie : 16 points

Partie II

8. - 2 points	Preuve de la formule : 1 point. Reste du raisonnement : 1 point.
9. - 3 points	1 point par formule.
10. - 1 point	
11. - 2+1+1 points	2 points pour $\varphi \circ \varphi$; 1 pour M^2 ; 1 pour la présence du mot *symétrie*.

Sous-total pour cette partie : 10 points

Partie III

12. - 5 points	Caractérisation $f(1) = 0$: 1 point ; $\mathcal{P}$ est un s.e.v. : 1 point ; équation de $\mathcal{P}$: 1 point ; dimension de $\mathcal{P}$: 1 point ; base de $\mathcal{P}$: 1 point.
13. - 5 points	Caractérisation $f(0) = f'(0) = 0$: 1 point ; $\mathcal{D}$ est un s.e.v. : 1 point ; dimension de $\mathcal{D}$: 1 point ; équations de $\mathcal{D}$: 1 point ; base de $\mathcal{D}$: 1 point.
14. - 2 points	Argument sur les dimensions : 1 point. Preuve de l'une des propriétés : 1 point.
15. - 1 point	
16. - 1+1 points	Matrice de φ : 1 point ; nature de φ : 1 point.

Sous-total pour cette partie : 15 points

Partie IV

17. - 1+1 points	$\mathcal{F}$ est un s.e.v. : 1 point. Dimension de $\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n[X]$: 1 point.
18. - 5 points	Mise en place du raisonnement : 1 point. Choix correct de λ : 1 point. Argumentation analytique (limite en $+\infty$, ou relation de domination) : 2 points. Mise en évidence d'une contradiction : 1 point.

Sous-total pour cette partie : 7 points

Total pour ce problème : 48 points

CORRIGÉ

Problème 1

1. – Il est bien connu que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ est égal à 1 ; f est continue en 0 ssi elle possède en 0 une limite égale à la valeur de f en 0, donc la valeur qui convient est $\boxed{\ell=1}$.

2. – Pour $x>0$, nous pouvons utiliser le développement limité à l'ordre 3 de sin au voisinage de 0 :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\frac{\sin x-x}{x^2}=\frac{x-x^3/6+o(x^3)-x}{x^2}=-x/6+o(x)$$

Donc $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\xrightarrow[x\to 0]{}0$ ce qui montre que f est dérivable à droite de 0, et que $f'_d(0)=0$.

Pour $x>0$, nous avons (avec à nouveau un développement limité) :

$$\begin{aligned}f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}&=\frac{x\big(1-x^2/2+o(x^2)\big)-\big(x-x^3/3+o(x^3)\big)}{x^2}\\&=\frac{x-x^3/2-x+x^3/3+o(x^3)}{x^2}=-x/6+o(x)\end{aligned}$$

Nous constatons que $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0$; ceci montre que f' est continue à droite de 0. Comme il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$, nous pouvons désormais affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

3. – Soit donc $n\geqslant 1$. Observons l'application $\psi\,:\,x\in\mathcal{I}_n\mapsto x\cos x-\sin x$. Elle est continue et dérivable sur $\mathcal{I}_n$; sa dérivée $\psi'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$ garde un signe constant dans l'intervalle $]n\pi,(n+1)\pi[$, donc ψ est strictement monotone sur l'intervalle $\mathcal{I}_n$. Enfin, ψ change de signe sur cet intervalle car $\psi(n\pi)=n\pi\cos(n\pi)=(-1)^n n\pi$ tandis que $\psi((n+1)\pi)=(-1)^{n+1}(n+1)\pi$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'affirmer que ψ s'annule au moins une fois, ce qui revient à dire que l'équation $x\cos x=\sin x$ possède au moins une solution dans cet intervalle ; l'unicité résulte du fait que ψ, strictement monotone, est injective.

4. – De l'inégalité $n\pi\leqslant x_n\leqslant(n+1)\pi$ nous déduisons $1\leqslant\dfrac{x_n}{n\pi}\leqslant 1+\dfrac{1}{n\pi}$; donc $\dfrac{x_n}{n\pi}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$, ce qui permet de conclure : $\boxed{x_n\underset{n\to\infty}{\sim}n\pi}$.

5. – Reprenons l'argumentation de la question 3, mais en nous intéressant à l'intervalle $\mathcal{I}_0$. $\psi'(x)<0$ pour $x\in\,]0,\pi[$ donc ψ est strictement décroissante sur $\mathcal{I}_0$. Comme $\psi(0)=0$, nous en déduisons $\psi(x)<0$, et donc $f'(x)<0$ pour tout $x\in\,]0,\pi[$. Comme $f'_d(0)=0$, nous pouvons affirmer que f est décroissante sur l'intervalle $\mathcal{I}_0$.

Observons maintenant ce qui se passe sur l'intervalle $\mathcal{I}_{2n-1}$, avec $n\geqslant 1$. Pour $x\in\,](2n-1)\pi,2n\pi[$, $\psi'(x)$ est du signe de $\psi'\big((2n-1)\pi+\pi/2\big)=-\big(2n\pi-\pi/2\big)\sin(2n\pi-\pi/2)=\big(2n\pi-\pi/2\big)>0$. Donc ψ croît sur l'intervalle $\mathcal{I}_{2n-1}$; comme $\psi(x_{2n-1})=0$, nous en déduisons que :

- sur l'intervalle $[(2n-1)\pi,x_{2n-1}[$, ψ (et par suite f') est négative, donc f est décroissante
- sur l'intervalle $]x_{2n-1},2n\pi]$ ψ (et par suite f') est positive, donc f est croissante

Observons enfin ce qui se passe sur l'intervalle $\mathcal{I}_{2n}$: pour $x\in\,]2n\pi,(2n+1)\pi[$, $\psi'(x)$ est du signe de $\psi'(2n\pi+\pi/2)=-(2n\pi+\pi/2)\sin(2n\pi+\pi/2)=-(2n\pi+\pi/2)<0$. Donc ψ décroît sur l'intervalle $\mathcal{I}_{2n}$; comme $\psi(x_{2n})=0$, nous en déduisons que :

- sur l'intervalle $[2n\pi,x_{2n}[$, ψ (et par suite f') est positive, donc f est croissante
- sur l'intervalle $]x_{2n},(2n+1)\pi]$ ψ (et par suite f') est négative, donc f est décroissante

6. – La courbe représentative représentée à la figure 1 a été obtenue avec le *script* Maple suivant :

```
f := proc(x); if x=0 then 1 else sin(x)/x fi end;
plot(f,0..5*Pi);
```

En vue de son incorporation dans le présent document, j'ai inséré (avant le `plot`) la commande suivante, pour « exporter » le tracé au format *PostScript* :

Figure 1 : courbe représentative de f

```
plotsetup(ps,plotoutput=‘antonio:lucca:niccolo:enm.ps‘,
  plotoptions=‘portrait,noborder,height=900,width=500‘);
```

7. – De par le choix de ℓ, f est continue sur $\mathbb{R}^+$; à ce titre, elle possède des primitives sur cet intervalle. F est celle de ces primitives qui s'annule en 0.

8. – Distingons deux cas selon la parité de n. Si n est pair : f est du signe de $\sin t$, donc positive, sur l'intervalle $\mathcal{I}_n$; par suite u_n est positif. Si n est impair, f est négative sur l'intervalle $\mathcal{I}_n$, et donc u_n est négatif. Résumons ceci en disant que u_n a le signe de $(-1)^n$.

9. – Commençons par remarquer que, pour $t > 0$:

$$\big|f(t+\pi)\big| = \left|\frac{\sin(t+\pi)}{t+\pi}\right| = \left|\frac{\sin t}{t+\pi}\right| \leqslant \left|\frac{\sin t}{t}\right| = \big|f(t)\big|$$

Notons ensuite que cette inégalité vaut aussi pour $t = 0$ puisque $f(\pi) = 0$ et $f(0) = 1$. f étant de signe constant sur l'intervalle $\mathcal{I}_n$, nous pouvons écrire, avec le changement de variable $t = u + \pi$:

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| &= \left|\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} f(t)\,dt\right| = \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \big|f(t)\big|\,dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \big|f(u+\pi)\big|\,du \\ &\leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \big|f(u)\big|\,du = \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(u)\,du\right| = |u_n| \end{aligned}$$

Ceci montre que la suite de terme général $|u_n|$ est décroissante. Tant que nous y sommes, prouvons que cette décroissance est *stricte* : il suffit de noter que, pour $t \in]n\pi, (n+1)\pi[$ on a $\big|f(t+\pi)\big| < \big|f(t)\big|$ et d'utiliser le théorème affirmant que « si une fonction est continue, de signe constant, et non identiquement nulle sur l'intervalle $[a, b]$ alors son intégrale sur cet intervalle n'est pas nulle ».

Pour montrer que la suite considérée converge vers 0, il suffit d'exploiter la majoration évidente $|\sin t| \leqslant 1$; pour $n \geqslant 1$, nous aurons :

$$\begin{aligned}|u_n| = \left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt\right| &\leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt \\ &\leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{t}\, dt \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{n\pi}\, dt = \frac{1}{n}\end{aligned}$$

La conclusion est immédiate.

10. – La suite de terme général $F(2n\pi)$ est croissante. En effet :

$$\begin{aligned}F(2(n+1)\pi) - F(2n\pi) &= \big(F((2n+2)\pi) - F((2n+1)\pi)\big) + \big(F((2n+1)\pi) - F(2n\pi)\big) \\ &= u_{2n+1} + u_{2n}\end{aligned}$$

Or $u_{2n} \geqslant 0$, $u_{2n+1} \leqslant 0$ et $|u_{2n+1}| \leqslant |u_{2n}|$. Donc $F(2(n+1)\pi) - F(2n\pi) \geqslant 0$. De la même manière, on établirait $F((2(n+1)+1)\pi) - F((2n+1)\pi) \leqslant 0$, prouvant ainsi que la suite de terme général $F((2n+1)\pi)$ est décroissante.

11. – Les suites de termes généraux respectifs $F(2n\pi)$ et $F((2n+1)\pi)$ sont adjacentes : en effet, la première est croissante, la deuxième est décroissante, et $|F(2n\pi) - F((2n+1)\pi)| = |u_{2n+1}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ces deux suites convergent donc vers une limite commune μ. Il en découle que la suite de terme général $F(n\pi)$ converge également vers μ ; en effet, soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite de terme général $F(2n\pi)$ converge vers μ, il existe un indice n'_ε tel que $\big|F(2n\pi) - \mu\big| \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant n'_\varepsilon$. De la même manière, comme la suite de terme général $F((2n+1)\pi)$ converge vers μ, il existe un indice n''_ε tel que $\big|F((2n+1)\pi) - \mu\big| \leqslant \varepsilon$ dès que $n \geqslant n''_\varepsilon$. Notons $n_\varepsilon = \max(2n'_\varepsilon, 2n''_\varepsilon + 1)$. Alors, pour $n \geqslant n_\varepsilon$ on aura $\big|F(n\pi) - \mu\big| \leqslant \varepsilon$. Et ceci termine la démonstration.

12. – Nous avons $F(0) = 0$. Comme la suite de terme général $F(2n\pi)$ converge vers μ en croissant, nous pouvons affirmer que μ est positif.

De la même manière, comme la suite de terme général $F((2n+1)\pi)$ converge vers μ en décroissant, nous pouvons affirmer que $\mu \leqslant F(\pi) = \displaystyle\int_0^\pi f(t)\, dt$. Mais il résulte de l'étude effectuée à la question **5** que, sur l'intervalle $\mathcal{I}_0 = [0, \pi]$, f décroît de $f(0) = 1$ à $f(\pi) = 0$. Donc $F(\pi) \leqslant \displaystyle\int_0^\pi dt = \pi$ ce qui établit la majoration $\mu \leqslant \pi$.

13. – Notons $n = \lfloor x/\pi \rfloor$; on a donc $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$ et $F(x) - F(n\pi) = \displaystyle\int_{n\pi}^x f(t)\, dt$. Comme f garde un signe constant sur $\mathcal{I}_n$, il vient, avec des majorations évidentes :

$$\left|\int_{n\pi}^x f(t)\, dt\right| \leqslant \int_{n\pi}^x \big|f(t)\big|\, dt \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \big|f(t)\big|\, dt = |u_n|$$

Nous en déduisons la majoration $\big|F(x) - F(n\pi)\big| \leqslant |u_n|$, équivalente à l'encadrement

$$F(n\pi) - |u_n| \leqslant F(x) \leqslant F(n\pi) + |u_n|$$

Et maintenant, faisons tendre x vers $+\infty$: n va lui aussi tendre vers $+\infty$, donc $F(n\pi)$ tend vers μ et $|u_n|$ tend vers 0. Le théorème des trois suites nous permet de conclure : $F(x)$ tend vers μ lorsque x tend vers $+\infty$.

14. – $g''(x) = \dfrac{x^2(-x\sin x) - 2x(x\cos x - \sin x)}{x^4} = \dfrac{(-x^2+2)\sin(x) - 2x\cos(x)}{x^3}$. Compte tenu de la suite, on écrit plutôt ce résultat sous la forme $g''(x) = \dfrac{(x^2-2)\sin'' x + 2x\sin''' x}{x^3}$

15. – Voici le tableau résumant les résultats obtenus, en notant que $g'(x) = \dfrac{x\sin'(x) + \sin'' x}{x^2}$:

n	0	1	2
P_n	1	X	X^2-2
Q_n	0	1	$2X$

Constatons que l'on a dans chaque colonne $P_n' = Q_n$.

16. – Notons $T_n(x) = P_n(x)\sin^{(n)} x + Q_n(x)\sin^{(n+1)} x$. Dérivons les deux membres de la relation $g^{(n)}(x) = \dfrac{T_n(x)}{x^{n+1}}$, il vient :

$$g^{(n+1)}(x) = \frac{x^{n+1}T_n'(x) - (n+1)x^n T_n(x)}{x^{2n+2}} = \frac{xT_n'(x) - (n+1)T_n(x)}{x^{n+2}}$$

Or $\sin^{(n)} x = -\sin^{(n+2)} x$; donc :

$$\begin{aligned} T_n'(x) &= P_n'(x)\sin^{(n)} x + P_n(x)\sin^{(n+1)} x + Q_n'(x)\sin^{(n+1)} x + Q_n(x)\sin^{(n+2)} x \\ &= (P_n(x) + Q_n'(x))\sin^{(n+1)} x - (P_n'(x) - Q_n(x))\sin^{(n+2)} x \end{aligned}$$

nous en déduisons :

$$\begin{aligned} xT_n'(x) - (n+1)T_n(x) = {}& (xP_n(x) + xQ_n'(x) - (n+1)Q_{n+1}(x))\sin^{(n+1)} x \\ &+ (xQ_n(x) - xP_n'(x) + (n+1)P_{n+1}(x))\sin^{(n+2)} x \end{aligned}$$

D'où les formules demandées :

$$\boxed{P_{n+1} = X(P_n + Q_n') - (n+1)Q_n} \quad \text{et} \quad \boxed{Q_{n+1} = X(Q_n - P_n') + (n+1)P_n}$$

17. – Procédons par récurrence pour établir que l'assertion $\mathcal{B}(n)$ suivante :

« les coefficients de P_n et de Q_n sont tous dans $\mathbb{Z}$ »

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{B}(0)$ est vraie car $P_0 = 1$ et $Q_0 = 0$. Supposons $\mathcal{B}(n)$ acquise ; les coefficients de P_n et de Q_n étant tous dans $\mathbb{Z}$, il en est de même des coefficients de P_n' et Q_n', donc de ceux de $P_{n+1} = X(P_n + Q_n') - (n+1)Q_n$ et $Q_{n+1} = X(Q_n - P_n') + (n+1)P_n$; ceci établit l'assertion $\mathcal{B}(n+1)$ et termine la preuve.

Procédons à nouveau par récurrence pour établir que l'assertion $\mathcal{D}(n)$ suivante :

> P_n est unitaire de degré n et a la parité de n
> Q_n est de degré $n-1$, son coefficient dominant est n, et sa parité est opposée à celle de n

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{D}(1)$ est vraie : $P_1 = X$ et $Q_1 = 1$. Supposons $\mathcal{D}(n)$ acquise ; de l'expression $P_{n+1} = X(P_n + Q_n') - (n+1)Q_n$ nous déduisons immédiatement que P_{n+1} est de degré $n+1$ (car XP_n l'est tandis que $XQ_n' - (n+1)Q_n$ est de degré au plus n), unitaire (car son coefficient dominant est celui de XP_n), et a la parité de $n+1$ car chacun des termes XP_n, XQ_n' et $(n+1)Q_n$ a la parité opposée à celle de n.
Observons maintenant l'expression $Q_{n+1} = X(Q_n - P_n') + (n+1)P_n$: il est clair que Q_{n+1} est de degré au plus n. Les coefficients de X^{n-1} dans Q_n et P_n' sont tous deux égaux à n, donc le coefficient de X^n dans Q_{n+1} est égal à $n+1$, ce qui implique que le degré de Q_{n+1} est égal à n. Enfin, Q_{n+1} a la parité opposée à celle de $n+1$, car chacun des termes XQ_n, XP_n' et $(n+1)Q_n$ a la parité de n ; ceci établit l'assertion $\mathcal{D}(n+1)$ et termine la preuve. L'assertion $\mathcal{D}(0)$ est vraie, sauf en ce qui concerne le degré de $Q_0 = 0$ (par convention, ce degré vaut $-\infty$).

18. – Calculs et résultats :

$$\begin{aligned} P_3 &= X(P_2 + Q_2') - 3Q_2 = X(X^2 - 2 + 2) - 3(2X) = X^3 - 6X \\ Q_3 &= X(Q_2 - P_2') + 3P_2 = X(2X - 2X) + 3(X^2 - 2) = 3X^2 - 6 \end{aligned}$$

19. – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous aurons en particulier $U(2n\pi)\sin(2n\pi) + V(2n\pi)\cos(2n\pi) = 0$, soit $V(2n\pi) = 0$; le polynôme V, ayant une infinité de racines réelles, est nécessairement le polynôme nul. En remplaçant $2n\pi$ par $2n\pi + \pi/2$ dans la preuve précédente, nous montrerions de la même façon $U = 0$.

20. – Dérivons $n+1$ fois les deux membres de l'égalité $xg(x) = \sin x$; il vient, pour $x > 0$:

$$xg^{(n+1)}(x) + (n+1)g^{(n)}(x) = \sin^{(n+1)}(x)$$

soit :

$$x\frac{P_{n+1}(x)\sin^{(n+1)}(x)+Q_{n+1}(x)\sin^{(n+2)}(x)}{x^{n+2}}+(n+1)\frac{P_n(x)\sin^{(n)}(x)+Q_{(n)}(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}}$$
$$=\sin^{(n+1)}(x)$$

Multiplions les deux membres par x^{n+1}, regroupons et utilisons $\sin^{(n+2)}(x)=-\sin^{(n)}(x)$:

$$\big(P_{n+1}(x)+(n+1)Q_n(x)-x^{n+1}\big)\sin^{(n+1)}(x)+\big((n+1)P_n(x)-Q_{n+1}(x)\big)\sin^{(n)}(x)$$

Le résultat de la question précédente s'applique alors (en toute rigueur, il faudrait détailler en distinguant deux cas de figure selon la parité de n) et nous permet d'écrire les relations demandées :

$$\boxed{P_{n+1}=X^{n+1}-(n+1)Q_n \quad \text{et} \quad Q_{n+1}=(n+1)P_n}$$

21. – En rapprochant les relations $Q_{n+1}=(n+1)P_n$ et $Q_{n+1}=X(Q_n-P'_n)+(n+1)P_n$ nous trouvons $X(Q_n-P'_n)=0$, donc $Q_n-P'_n=0$ soit $\boxed{P'_n=Q_n}$.

En rapprochant maintenant les relations $P_{n+1}=-(n+1)Q_n$ et $P_{n+1}=X(P_n+Q'_n)-(n+1)Q_n$ il vient $X(P_n+Q'_n)=X^{n+1}$ puis $P_n+Q'_n=X^n$. Mais nous venons d'établir $Q_n=P'_n$, dont nous déduisons $Q'_n=P''_n$ et finalement $\boxed{P_n+P''_n=X^n}$.

22. – Il est clair que T et $\Phi(T)$ ont même degré ; ceci montre que $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ stable par Φ, et justifie donc l'existence de l'endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Φ. Ceci montre également que le noyau de Φ, comme celui de Φ_n, se réduisent au polynôme nul, et par suite que ces endomorphismes sont injectifs. Mais alors Φ_n, en tant qu'endomorphisme injectif de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$, lequel est de dimension finie (à savoir $n+1$), est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Il reste à prouver que Φ est surjectif. Soit $U\in\mathbb{R}[X]$; soit n un naturel au moins égal au degré de U ; U appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ donc possède un antécédent T par Φ_n ; mais alors T est aussi antécédent de U par Φ.

23. – Partons de la relation $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{x}\sin x$ et utilisons la formule de Leibniz pour dériver n fois ses deux membres :

$$f^{(n)}(x)=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\mathrm{C}_n^k\frac{d^k}{dx^k}\Big(\frac{1}{x}\Big)\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(\sin x)=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\mathrm{C}_n^k\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}\sin^{(n-k)}(x)$$
$$=\frac{n!}{x^{n+1}}\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\frac{(-1)^k x^{n-k}\sin^{(n-k)}(x)}{(n-k)!}$$

En séparant, dans la dernière somme écrite, les termes d'indice pair et ceux d'indice impair, il vient :

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{x^{n+1}}\sum_{0\leqslant 2p\leqslant n}\frac{(-1)^{2p}x^{n-2p}\sin^{(n-2p)}(x)}{(n-2p)!}+\frac{n!}{x^{n+1}}\sum_{0\leqslant 2p-1\leqslant n}\frac{(-1)^{2p-1}x^{n-2p+1}\sin^{(n-2p+1)}(x)}{(n-2p+1)!}$$

Or $\sin^{(n-2p)}(x)=(-1)^p\sin^{(n)}(x)$ et $\sin^{(n-2p+1)}(x)=(-1)^p\sin^{(n+1)}(x)$. Donc :

$$f^{(n)}(x)=\frac{n!}{x^{n+1}}\sum_{0\leqslant 2p\leqslant n}\frac{(-1)^p x^{n-2p}\sin^{(n)}(x)}{(n-2p)!}+\frac{n!}{x^{n+1}}\sum_{0\leqslant 2p-1\leqslant n}\frac{(-1)^{p+1}x^{n-2p+1}\sin^{(n+1)}(x)}{(n-2p+1)!}$$

En rapprochant cette dernière expression de $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)\sin^{(n)}(x)+Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}}$, et en appliquant le résultat de la question **19**, nous en déduisons la formule :

$$\boxed{P_n=n!\sum_{0\leqslant 2p\leqslant n}\frac{(-1)^p}{(n-2p)!}X^{n-2p}}$$

24. – Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''+y=0$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto a\sin x+b\cos x$, où a et b sont deux constantes réelles. Par ailleurs, nous avons établi plus haut que P_n (en tant que polynôme) est une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}_n$; ce qui revient à dire que P_n (en tant que fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) est solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y+y''=x^n$. Conclusion : les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle sont les fonctions de la forme $x\mapsto a\sin x+b\cos x+P_n(x)$, où a et b sont deux constantes réelles.

Problème 2

1. – Antoine écrit ainsi une condition *nécessaire* vérifiée par a, b et c :

$$\begin{cases} (ap+bq+cr)(0)=0 \\ (ap+bq+cr)(1)=0 \\ (ap+bq+cr)(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ ae+be^2+ce=0 \\ ae^2+be^4+ce^4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 & \\ a+be+c=0 & \mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_2/e \\ a+be^2+ce^2=0 & \mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3/e^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 & \\ (e-1)b=0 & \mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1 \\ (1-e^2)a=0 & \mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3-e^2\mathcal{L}_1 \end{cases}$$

$\mathcal{L}_2$ implique $b=0$; $\mathcal{L}_3$ implique $a=0$; ces résultats reportés dans $\mathcal{L}_1$ nous donnent $c=0$, ce qui termine la preuve.

2. – Antoine a implicitement divisé les lignes $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_3$ du dernier système par $e-1$ et $1-e^2$ respectivement, ce qui suppose qu'aucun de ces deux nombres n'est nul. Antoine a probablement utilisé la minoration $e>1$. Établissons celle-ci à partir de la définition de e : c'est le réel vérifiant $\ln e=1$. Comme $\ln 1=0$, la stricte croissance de la fonction logarithme népérien suffit pour conclure.

3. – $ap+bq+cr$ étant égale à la fonction nulle, la partie régulière de son développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 est le polynôme nul, ce qui nous donnera trois conditions portant sur a, b et c ; avec un peu de chance, celles-ci permettront d'établir $a=b=c=0$. Voyons ceci de près :

$$\begin{aligned}(ap+bq+cr)(x) &= ap(x)+bq(x)+cr(x)=ae^x+be^{2x}+ce^{x^2} \\ &= a\Big(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\Big)+b\Big(1+2x+2x^2+o(x^2)\Big)+c\Big(1+x^2+o(x^2)\Big) \\ &= (a+b+c)+(a+2b)x+\Big(\frac{a}{2}+2b+c\Big)x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

L'unicité du développement limité permet d'écrire le système d'équations $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2b=0 \\ \frac{a}{2}+2b+c=0 \end{cases}$ dont la résolution est banale.

4. – Remarquons que $p(x)=e^x$ est négligeable devant $q(x)=e^{2x}$, lui-même négligeable devant $r(x)=e^{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$. soit donc a, b et c tels que $ap+bq+cr=0$. Supposons c non nul : on pourrait écrire $r(x)=-\frac{a}{c}p(x)-\frac{b}{c}q(x)$; mais cette relation est contradictoire car, lorsque x tend vers $+\infty$, le membre de droite est négligeable devant le membre de gauche. C'est donc que c est nul ; on démontre de la même façon $b=0$. Enfin, comme p n'est pas la fonction nulle, il en résulte $a=0$.

5. – La famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$ et est formée de trois éléments ; donc la dimension de $\mathcal{E}$ est égale à trois.

6. – La linéarité de ψ découle de la linéarité de la dérivation, considérée comme endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et de la linéarité de l'opérateur $f\mapsto f(\alpha)$ (où $\alpha\in\mathbb{R}$ est fixé).

Comme $\mathcal{E}$ est $\mathbb{R}^3$ ont même dimension, il suffit, pour prouver que ψ est un isomorphisme, de montrer que son noyau se réduit à la fonction nulle :

$$ap+bq+cr\in\ker\psi \Rightarrow \begin{cases} (ap+bq+cr)(0)=0 \\ (ap+bq+cr)'(0)=0 \\ (ap+bq+cr)(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2b=0 \\ ae+be^2+ce=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ b-c=0 \\ b(e^2-e)=0 \end{cases}$$

Le dernier système (obtenu avec les transformations $\mathcal{L}_2 \leftarrow \mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_3 \leftarrow \mathcal{L}_3-e\mathcal{L}_1$) implique clairement $a=b=c=0$ donc $ap+bq+cr=\mathbf{0}$ et ceci achève la preuve.

7. – Il suffit de résoudre le système de trois équations (aux inconnues a, b et c) formé en écrivant que les fonctions $ap+bq+cr$ et f prennent la même valeur en 0, la même valeur en 1, et que leurs dérivées respectives prennent la même valeur en 0 ; on utilise les mêmes transformations qu'à la question précédente.

$$\begin{cases} (ap+bq+cr)(0) = f(0) \\ (ap+bq+cr)'(0) = f'(0) \\ (ap+bq+cr)(1) = f(1) \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c = f(0) \\ a+2b = f'(0) \\ ae+be^2+ce = f(1) \end{cases} \iff \begin{cases} a+b+c = f(0) \\ b-c = f'(0)-f(0) \\ b(e^2-e) = f(1)-ef(0) \end{cases}$$

La troisième équation du dernier système écrit nous donne :

$$b = \frac{f(1)-ef(0)}{e(e-1)} = -\frac{1}{e-1}f(0) + \frac{1}{e(e-1)}f(1)$$

Reportons ceci dans la deuxième équation de ce même système :

$$c = f(0) - f'(0) + b = \frac{e-2}{e-1}f(0) - f'(0) + \frac{1}{e(e-1)}f(1)$$

Enfin, ces deux résultats reportés dans la première équation donnent :

$$a = f(0) - b - c = \frac{2}{e-1}f(0) + f'(0) - \frac{2}{e(e-1)}f(1)$$

8. – Remarquons que les formules exprimant (A, B, C) en fonction de f ne diffèrent de celles qui expriment (a, b, c) que par le remplacement de $f(1)$ par $-f(1)$; nous avons donc

$$\begin{aligned} \varphi(f) = Ap + Bq + Cr &= \psi^{-1}\big(f(0), f'(0, -f(1)\big) = \psi^{-1}\big(\theta\big(f(0), f'(0, f(1)\big)\big) \\ &= (\psi^{-1}\circ\theta)\big(f(0), f'(0, f(1)\big) = (\psi^{-1}\circ\theta)\big(\psi(f)\big) = (\psi^{-1}\circ\theta\circ\psi)(f) \end{aligned}$$

Ceci vaut pour tout $f \in \mathcal{E}$, donc $\varphi = \psi^{-1}\circ\theta\circ\psi$.

Il est clair que $\theta\circ\theta = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Du coup, φ est un automorphisme de $\mathcal{E}$, car c'est par définition une application de $\mathcal{E}$ dans lui-même, et elle est la composée de trois isomorphismes d'espaces vectoriels.

9. – Nous noterons (A_p, B_p, C_p) les coordonnées de $\varphi(p)$ dans la base $\mathcal{B}$.
$p(x) = e^x$, donc $p'(x) = e^x$, $p(0) = p'(0) = 1$ et $p(1) = e$; en reportant :

$$\left|\begin{array}{l} A_p = \dfrac{2}{e-1} + 1 + \dfrac{2}{e(e-1)} = \dfrac{2e+e(e-1)+2e}{e(e-1)} = \dfrac{e^2+3e}{e(e-1)} = \dfrac{e+3}{e-1} \\ B_p = -\dfrac{1}{e-1} - \dfrac{e}{e(e-1} = -\dfrac{2}{e-1} \\ C_p = \dfrac{e-2}{e-1} - 1 - \dfrac{e}{e(e-1)} = \dfrac{e-2-(e-1)-1}{e-1} = -\dfrac{2}{e-1} \end{array}\right.$$

nous en déduisons $\boxed{\varphi(p) = \dfrac{(3+e)p-2q-2r}{e-1}}$.

$q(x) = e^{2x}$, donc $q'(x) = 2e^{2x}$, $q(0) = 1$, $q'(0) = 2$ et $q(1) = e^2$; en reportant :

$$\left|\begin{array}{l} A_q = \dfrac{2}{e-1} + 2 + \dfrac{2e^2}{e(e-1)} = \dfrac{2+2(e-1)+2e}{e-1} = \dfrac{4e}{e-1} \\ B_q = -\dfrac{1}{e-1} - \dfrac{e^2}{e(e-1)} = -\dfrac{e+1}{e-1} \\ C_q = \dfrac{e-2}{e-1} - 2 - \dfrac{e^2}{e(e-1)} = \dfrac{e-2-2(e-1)-e}{e(e-1)} = -\dfrac{2e}{e-1} \end{array}\right.$$

D'où $\boxed{\varphi(q) = \dfrac{4ep-(e+1)q-2er}{e-1}}$.

$r(x) = e^{x^2}$, donc $r'(x) = 2xe^{x^2}$, $r(0) = 1$, $r'(0) = 0$ et $r(1) = e$; en reportant :

$$\left| \begin{array}{l} A_r = \dfrac{2}{e-1} + \dfrac{2e}{e(e-1)} = \dfrac{4}{e-1} \\ B_r = -\dfrac{1}{e-1} - \dfrac{e}{e(e-1)} = -\dfrac{2}{e-1} \\ C_r = \dfrac{e-2}{e-1} - \dfrac{e}{e(e-1)} = \dfrac{e-3}{e-1} \end{array} \right.$$

D'où $\boxed{\varphi(r) = \dfrac{4p - 2q + (e-3)r}{e-1}}$.

10. – La question précédente nous donne les colonnes de M :

$$M = \frac{1}{e-1}\begin{pmatrix} 3+e & 4e & 4 \\ -2 & -e-1 & -2 \\ -2 & -2e & e-3 \end{pmatrix}$$

11. – Comme $\theta^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, on a :

$$\varphi \circ \varphi = (\psi^{-1} \circ \theta \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ \theta \circ \psi) = \psi^{-1} \circ \theta \circ (\psi \circ \psi^{-1}) \circ \theta \circ \psi = \psi^{-1} \circ \theta^2 \circ \psi = \mathrm{Id}_E$$

nous en déduisons $M^2 = I_3$ (la matrice identité d'ordre 3). φ est un endomorphisme involutif de $\mathcal{E}$: c'est donc une symétrie de $\mathcal{E}$.

12. – L'égalité $\varphi(f) = f$ équivaut, d'après la question **8**, à $(\psi^{-1} \circ \theta \circ \psi)(f) = f$ soit (comme ψ est bijective) $(\theta \circ \psi)(f) = (\psi)(f)$ ou encore $\big(f(0), f'(0), -f(1)\big) = \big(f(0), f'(0), f(1)\big)$ soit finalement $\boxed{f(1) = 0}$.

$\mathcal{P}$ est alors un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$, en tant que noyau de la forme linéaire $f \in \mathcal{E} \mapsto f(1)$. *Remarque* : on pouvait aussi noter que $\mathcal{P}$ est le noyau de l'endomorphisme $\varphi - Id_{\mathcal{E}}$.

Soit $f = ap + bq + cr$ un élément de $\mathcal{E}$; on a $f(1) = ap(1) + bq(1) + cr(1) = e(a + eb + c)$ (calcul effectué à la question **9**) ; donc une équation de $\mathcal{P}$ est $\boxed{a + eb + c = 0}$.

La forme linéaire $f \in \mathcal{E} \mapsto f(1)$ n'est pas identiquement nulle : on a par exemple $p(1) = e \neq 0$. Le théorème du rang permet alors d'affirmer que la dimension de $\mathcal{P}$ (noyau de cette forme linéaire) est égale à 3 (dimension de $\mathcal{E}$) moins 1 (dimension de $\mathbb{R}$), soit 2 : $\mathcal{P}$ est un plan.

Exhibons une base de $\mathcal{P}$ en choisissant deux vecteurs de $\mathcal{P}$ indépendants ; par exemple $e_1 = p - r$ et $e_2 = ep - q$.

13. – L'égalité $\varphi(f) = -f$ équivaut, d'après la question **8**, à $(\psi^{-1} \circ \theta \circ \psi)(f) = -f$ soit (comme ψ est bijective) $(\theta \circ \psi)(f) = -(\psi)(f)$ ou encore $\big(f(0), f'(0), -f(1)\big) = -\big(f(0), f'(0), f(1)\big)$ soit finalement $\boxed{f(0) = f'(0) = 0}$.

$\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$, en tant que noyau de l'endomorphisme $\varphi - Id_{\mathcal{E}}$; ou, si l'on préfère, en tant qu'intersection des noyaux des formes linéaires $f \mapsto f(0)$ et $f \mapsto f'(0)$.

Soit $f = ap + bq + cr$ un élément de $\mathcal{E}$; avec les calculs effectués à la question **9**, on a :

$$f(0) = ap(0) + bq(0) + cr(0) = a + b + c \qquad \text{et} \qquad f'(0) = ap'(0) + bq'(0) + cr'(0) = a + 2b$$

Les égalités $\boxed{a + b + c = 0 \text{ et } a + 2b = 0}$ constituent donc des équations de $\mathcal{P}$ dans la base $\mathcal{B}$.

$\mathcal{D}$ apparaît ainsi comme l'intersection de deux plans (d'équations respectives $a+b+c = 0$ et $a+2b = 0$) ; ces deux plans étant clairement distincts, $\mathcal{D}$ est de dimension 1.

Le vecteur non nul $e_3 = (2, -1, -1)$ appartient à $\mathcal{D}$, et constitue donc une base de cette droite vectorielle.

14. – Compte tenu des dimensions respectives de $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ il suffit de prouver que $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}$ se réduit à la fonction nulle ; la façon la plus simple de le prouver consiste à remarquer qu'un élément f de $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}$ vérifie à la fois $\varphi(f) = f$ et $\varphi(f) = -f$, donc $f = -f$ soit $f = \mathbf{0}$.

15. – Comme $\mathcal{E}$ est de dimension 3 et que $\mathcal{C}$ contient exactement trois éléments, il suffit de prouver que $\mathcal{C}$ est une famille génératrice. Soit $f \in \mathcal{E}$; comme $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$, il existe $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{D}$ telles que $f = g + h$. Ensuite, comme (e_1, e_2) est une base de $\mathcal{P}$, il existe des réels a et b tels que $g = ae_1 + be_2$; de même, comme e_3 engendre $\mathcal{D}$, il existe un réel c tel que $h = ce_3$. On obtient alors $f = ae_1 + be_2 + ce_3$, ce qui termine la preuve.

16. – Nous avons $\varphi(e_1) = e_1$, $\varphi(e_2) = e_2$ et $\varphi(e_3) = -e_3$. Donc la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}$ est

$$Mat_{\mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

φ est la symétrie par rapport au plan $\mathcal{P}$, parallèlement à la droite $\mathcal{D}$.

17. – Le terme constant d'un polynôme P est égal à la valeur $P(0)$ prise par ce polynôme en 0. Ceci montre que $\mathcal{F}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$, en tant que noyau de la forme linéaire $P \mapsto P(0)$.

Considérons la restriction à $\mathbb{R}_n[X]$ de la forme linéaire précédente ; clairement, son noyau est $\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n[X]$. Cette forme linéaire n'est pas la forme nulle (par exemple le polynôme 1 n'est pas dans son noyau) donc son image est $\mathbb{R}$ tout entier ; par suite, son rang est égal à 1. Le théorème du rang nous permet alors d'affirmer que la dimension de son noyau est égale à n, puisque la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est égale à $n+1$.

18. – Raisonnons par l'absurde. Soit $(\lambda_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ une famille de réels non tous nuls, telle que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant q} \lambda_k f_k = 0$. Nous ne restreignons pas la généralité en supposant $\lambda_q \neq 0$. Comme la fonction f_q ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, nous pouvons alors écrire : $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k < q} \lambda_k \frac{f_k}{f_q} = -\lambda_q$; pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous aurons :

$$(\mathcal{R}) : \quad \sum_{1 \leqslant k < q} \lambda_k \frac{f_k(x)}{f_q(x)} = -\lambda_q$$

Faisons tendre x vers $+\infty$; pour tout $k \in [\![1, q-1]\!]$ on aura :

$$P_q(x) - P_k(x) = \sum_{k \leqslant j < q} \big(P_{j+1}(x) - P_j(x)\big) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

car, par hypothèse, chacune des quantités $P_{j+1}(x) - P_j(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Dans ces conditions, $P_k(x) - P_q(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ et donc $\dfrac{f_k(x)}{f_q(x)} = e^{P_k(x) - P_q(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Nous mettons ainsi en évidence une contradiction : le membre de gauche de la relation $(\mathcal{R})$ tend vers 0, alors que le membre de droite est une constante non nulle.

FIN