

- ▶ Nous nous proposons de mettre en œuvre plusieurs méthodes de résolution numérique d'équations de la forme $f(x) = x$ ou $f(x) = 0$, et de visualiser le comportement de ces méthodes sur des exemples.

Résolution de l'équation $f(x) = x$ par itération de la fonction f

- ▶ Nous étudions la méthode consistant à choisir une valeur initiale x_0 , et à calculer les images de x_0 par les itérées successives de f .

Q1 Montrez que l'équation $\cos(x) = x$ possède une et une seule solution réelle ℓ ; encadrez cette solution. Montrez que la méthode proposée converge.

Q2 Utilisez Maple pour donner une estimation numérique de ℓ .

- ▶ Nous allons maintenant visualiser le comportement de cette méthode, en construisant avec Maple la représentation qui avait été exposée en cours, et qui est rappelée ci-dessous.

Vous trouverez cette courbe ici :

<http://newbox/div/pcsi2/tpinfo/resol-eq1.pdf>

- ▶ Vous aurez besoin de la bibliothèque `plot`; pour ce faire, passez la commande `with(plots):`

Nous voulons représenter, dans une même figure : la courbe représentative de f ; la droite d'équation $y = x$; et l'«escargot». Pour ce faire, nous utiliserons la commande `display`: celle-ci accepte une liste de tracés, construits chacun avec la commande `plot`; voici un exemple, que vous mettrez en œuvre pour mieux comprendre :

```
p1 := plot(sin,0..Pi):
p2 := plot(cos,0..Pi):
display([p1,p2]);
```

Q3 Pourquoi a-t-on utilisé tantôt `:` et tantôt `;` dans le script précédent ?

Q4 Rédigez une fonction `hbar` qui prend trois arguments xg , xd et y et construit le segment reliant les points (xg, y) et (xd, y) .

Q5 Rédigez une fonction `vbar` qui prend trois arguments x , yb et yh et construit le segment reliant les points (x, yb) et (x, yh) . Indication : utilisez un arc paramétré.

Q6 Notons x_k l'image de x_0 par la k -ième itérée de f . Notons M_k le point de coordonnées (x_k, x_k) et P_k le point de coordonnées (x_k, x_{k+1}) . Nous devons construire les segments M_kP_k et P_kM_{k+1} pour $0 \leq k < n$.

Q7 Utilisez la fonction `seq` pour construire les `plot` qui vont nous fournir tous ces segments.

Q8 Avec une commande `display`, visualisez la courbe, la diagonale et l'escargot.

Résolution de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton

- Cette méthode converge rapidement, sous certaines hypothèses, que nous ne détaillerons pas ici. Voici sa description : on choisit x_0 ; x_{k+1} est l'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_k . La figure ci-dessous montre la première étape de cette méthode avec $x_0 = 2$.

Vous trouverez cette courbe ici :

<http://newbox/div/pcsi2/tpinfo/resol-eq2.pdf>

- Q9 Que se passe-t-il lorsque l'on applique cette méthode à l'équation $x^2 = 0$?
- Q10 Que se passe-t-il lorsque l'on applique cette méthode à l'équation $e^x = 0$?
- Q11 Que se passe-t-il lorsque l'on applique cette méthode à l'équation $e^x = 1$?
- Q12 Exhibez un exemple (f, x_0) pour lequel la suite des x_k est arithmétique, non constante (et diverge donc vers $\pm\infty$).
- Q13 Exhibez un exemple (f, x_0) pour lequel la suite des x_k est périodique, non constante.
- Q14 Rédigez une fonction Maple à trois arguments : f est la fonction, x_0 est la valeur initiale, n est le nombre d'itérations. La fonction doit rendre la valeur x_n (sauf si un incident de calcul se produit, par exemple une division par zéro).
- Q15 Rédigez une fonction Maple à trois arguments : f est la fonction, x_0 est la valeur initiale, n est le nombre d'itérations. La fonction doit rendre une figure montrant la courbe représentative de f , et les tangentes à cette courbe aux points d'abscisse x_k , pour $0 \leq k < n$.

Bassins d'attraction

- Choisissons l'une des deux méthodes exposées précédemment. Soient I un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction de I dans I possédant au moins un point fixe ξ . Le *bassin d'attraction* de ξ , relatif à f et à la méthode choisie, est l'ensemble des $x_0 \in I$ tels que la suite (x_n) définie par le choix de x_0 converge vers ξ .
- Q16 Supposons f contractante, c'est-à-dire k -lipschitzienne, avec $k < 1$. Montrez que f ne possède qu'un point fixe.
- Q17 Montrez qu'une fonction contractante ne possède pas forcément de point fixe.
- Notons $f : x \mapsto x^3 - x$.
- Q18 Quel est le bassin d'attraction de 0, pour la méthode de NEWTON ?
- Q19 Quel est le bassin d'attraction de 1, pour la méthode de NEWTON ?
- Q20 Soit g une fonction possédant deux points fixes ξ_1 et ξ_2 . Que pouvez-vous dire de l'intersection des bassins d'attraction de ξ_1 et ξ_2 ?