TD Maple : résolution numérique d'une équation

► Nous nous proposons de mettre en œuvre plusieurs méthodes de résolution numérique d'équations de la forme $f(x) = x$ ou $f(x) = 0$, et de visualiser le comportement de ces méthodes sur des exemples.

Résolution de l'équation $f(x) = x$ par itération de la fonction f

► Nous étudions la méthode consistant à choisir une valeur initiale x_0, et à calculer les images de x_0 par les itérées successives de f.

Q1 Montrez que l'équation $\cos(x) = x$ possède une et une seule solution réelle ℓ ; encadrez cette solution. Montrez que la méthode proposée converge.

Q2 Utilisez Maple pour donner une estimation numérique de ℓ.

► Nous allons maintenant visualiser le comportement de cette méthode, en construisant avec Maple la représentation qui avait été exposée en cours, et qui est rappelée ci-dessous.

Vous trouverez cette courbe ici :
`http://newbox/div/pcsi2/tpinfo/resol-eq1.pdf`

► Vous aurez besoin de la bibliothèque `plot` ; pour ce faire, passez la commande

```
with(plots):
```

Nous voulons représenter, dans une même figure : la courbe représentative de f ; la droite d'équation $y = x$; et l'« escargot ». Pour ce faire, nous utiliserons la commande `display` : celle-ci accepte une liste de tracés, construits chacun avec la commande `plot` ; voici un exemple, que vous mettrez en œuvre pour mieux comprendre :

```
p1 := plot(sin,0..Pi):
p2 := plot(cos,0..Pi):
display([p1,p2]);
```

Q3 Pourquoi a-t-on utilisé tantôt `:` et tantôt `;` dans le script précédent ?

Q4 Rédigez une fonction `hbar` qui prend trois arguments xg, xd et y et construit le segment reliant les points (xg, y) et (xd, y).

Q5 Rédigez une fonction `vbar` qui prend trois arguments x, yb et yh et construit le segment reliant les points (x, yb) et (x, yh). Indication : utilisez un arc paramétré.

Q6 Notons x_k l'image de x_0 par la k-ième itérée de f. Notons M_k le point de coordonnées (x_k, x_k) et P_k le point de coordonnées (x_k, x_{k+1}). Nous devons construire les segments M_kP_k et P_kM_{k+1} pour $0 \leqslant k < n$.

Q7 Utilisez la fonction `seq` pour construire les `plot` qui vont nous fournir tous ces segments.

Q8 Avec une commande `display`, visualisez la courbe, la diagonale et l'escargot.

Tournez S.V.P.

Résolution de l'équation $f(x) = 0$ par la méthode de Newton

► Cette méthode converge rapidement, sous certaines hypothèses, que nous ne détaillerons pas ici. Voici sa description : on choisit x_0 ; x_{k+1} est l'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_k. La figure ci-dessous montre la première étape de cette méthode avec $x_0 = 2$.

Vous trouverez cette courbe ici :
`http://newbox/div/pcsi2/tpinfo/resol-eq2.pdf`

$\boxed{\text{Q9}}$ Que se passe-t-il lorsque l'on applique cette méthode à l'équation $x^2 = 0$?

$\boxed{\text{Q10}}$ Que se passe-t-il lorsque l'on applique cette méthode à l'équation $e^x = 0$?

$\boxed{\text{Q11}}$ Que se passe-t-il lorsque l'on applique cette méthode à l'équation $e^x = 1$?

$\boxed{\text{Q12}}$ Exhibez un exemple (f, x_0) pour lequel la suite des x_k est arithmétique, non constante (et diverge donc vers $\pm\infty$).

$\boxed{\text{Q13}}$ Exhibez un exemple (f, x_0) pour lequel la suite des x_k est périodique, non constante.

$\boxed{\text{Q14}}$ Rédigez une fonction Maple à trois arguments : f est la fonction, x_0 est la valeur initiale, n est le nombre d'itérations. La fonction doit rendre la valeur x_n (sauf si un incident de calcul se produit, par exemple une division par zéro).

$\boxed{\text{Q15}}$ Rédigez une fonction Maple à trois arguments : f est la fonction, x_0 est la valeur initiale, n est le nombre d'itérations. La fonction doit rendre une figure montrant la courbe représentative de f, et les tangentes à cette courbe aux points d'abscisse x_k, pour $0 \leqslant k < n$.

Bassins d'attraction

► Choisissons l'une des deux méthodes exposées précédemment. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans I possédant au moins un point fixe ξ. Le *bassin d'attraction* de ξ, relatif à f et à la méthode choisie, est l'ensemble des $x_0 \in I$ tels que la suite (x_n) définie par le choix de x_0 converge vers ξ.

$\boxed{\text{Q16}}$ Supposons f contractante, c'est-à-dire k-lipschitzienne, avec $k < 1$. Montrez que f ne possède qu'un point fixe.

$\boxed{\text{Q17}}$ Montrez qu'une fonction contractante ne possède pas forcément de point fixe.

► Notons $f : x \mapsto x^3 - x$.

$\boxed{\text{Q18}}$ Quel est le bassin d'attraction de 0, pour la méthode de NEWTON ?

$\boxed{\text{Q19}}$ Quel est le bassin d'attraction de 1, pour la méthode de NEWTON ?

$\boxed{\text{Q20}}$ Soit g une fonction possédant deux points fixes ξ_1 et ξ_2. Que pouvez-vous dire de l'intersection des bassins d'attraction de ξ_1 et ξ_2 ?