PCSI2 — TP Maple : matrices et déterminants

- Nous examinons aujourd'hui comment manipuler des matrices avec Maple. Nous en profitons pour établir les principales propriétés de la fonction $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}) \mapsto \det A$.

Généralités

- Il existe plusieurs façons de saisir une matrice, dans Maple. Dans tous les cas, il faut préciser les dimensions. Commencez par charger le paquetage `linalg` :

```
with(linalg);
```

Voici comment décrire une matrice à 2 lignes et 3 colonnes :

```
A := matrix(2,3,[5,8,x,a^2,0,beta]);
```

Q1 Addition et multiplication par un scalaire s'écrivent naturellement : observez `A+B`, `2*A`. Que pensez-vous de `3+A` ?

- La multiplication matricielle se note avec l'opérateur inerte `&*`. Pour calculer AB, il faudra donc saisir `evalm(A &* B)`.

- Pour les matrices, Maple applique la règle d'évaluation *au dernier nom*, ce qui explique le recours à `evalm` (ou `print` si l'on a juste une matrice) ; pour mieux comprendre, saisissez le script suivant :

```
restart; x := y; y := z; z := matrix(2,2,[a,b,c,d]); x;
```

Q2 Consultez l'aide sur `array` et `matrix` ; quelles différences existe-t-il entre ces deux fonctions ?

Propriétés du déterminant

- Soit $A = \begin{pmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3 ; le *déterminant* de A, noté $\det(A)$, est le scalaire $aqz + brx + cpy - cqx - ary - bpz$ (règle de Sarrus).

Q3 Rédigez une fonction `det3` qui calcule le déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 ; cette fonction existe déjà dans Maple, mais, pour une fois, nous réinventons la roue.

Q4 Utilisez la fonction `det3` pour vérifier l'invariance par transposition : $\det(A^T) = \det(A)$.

Q5 Utilisez la fonction `det3` pour vérifier la linéarité de la fonction det par rapport à la première colonne.

Q6 Utilisez la fonction `det3` pour vérifier que le déterminant est multiplié par -1 quand on échange les colonnes 1 et 2, ainsi que quand on échange les colonnes 1 et 3. Est-il nécessaire d'effectuer la vérification pour l'échange des colonnes 2 et 3 ? Et pour l'échange de deux lignes ?

Q7 Démontrez la linéarité de la fonction det par rapport à n'importe quelle colonne, puis par rapport à n'importe quelle ligne.

Q8 Utilisez la fonction `det3` pour établir la formule $\det(A \times B) = (\det A) \times (\det B)$.

Vecteurs et matrices

- On peut définir un vecteur « colonne » comme suit :

```
v := <2,8,3> ;
```

Un vecteur « ligne » sera défini comme suit :

```
v := <2|8|3> ;
```

Q9 Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, défini par sa matrice A dans la base canonique, et $v \in \mathbb{R}^3$. Comment obtenez-vous le vecteur $f(v)$?

Production de matrices inversibles

► Consultez l'aide sur `random`.

$\boxed{\text{Q10}}$ Rédigez une fonction `alea` de deux variables a et b, qui rend un nombre entier aléatoire compris entre a et b inclus. Par exemple, nous simulerons le lancé d'un dé avec `alea(1,6)`.

$\boxed{\text{Q11}}$ Rédigez une fonction de deux variables a et b, qui construit une matrice carrée d'ordre 3, à coefficients entiers choisis aléatoirement dans l'intervalle $[\![a,b]\!]$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Rédigez une fonction de deux variables a et b, qui construit une matrice carrée d'ordre 3, à coefficients entiers choisis aléatoirement dans l'intervalle $[\![a,b]\!]$, et dont le déterminant vaut $+1$ ou -1.

$\boxed{\text{Q13}}$ Utilisez cette fonction pour « choisir au hasard » une telle matrice A. Calculez son inverse, avec la méthode des transformations élémentaires vue en cours (vous admettrez que, du moment que le déterminant n'est pas nul, la matrice est effectivement inversible). Vérifiez votre résultat en demandant à Maple de calculer `evalm(A^(-1))`.

Faisons tourner les matrices

$\boxed{\text{Q14}}$ Rédigez une fonction ρ qui fait tourner une matrice carrée d'ordre 3 de 90 degrés dans le sens des aiguilles d'une montre : $\rho\begin{pmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b & a \\ r & q & p \\ z & y & x \end{pmatrix}$. Deux rédactions sont possibles : la fonction modifie la matrice A, ou bien la fonction construit une nouvelle matrice $B = \rho(A)$.

Matrices de Hilbert

► La matrice de Hilbert H_n est carrée d'ordre n ; ses coefficients sont définis comme suit : $(H_n)_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

$\boxed{\text{Q15}}$ Calculez les inverses des matrices de Hilbert H_2 à H_5.

$\boxed{\text{Q16}}$ Montrez que les matrices de Hilbert sont toutes inversibles. Indication : que vaut $\displaystyle\int_0^1 t^{i+j-2}\,dt$?