TD Maple : analyse

- Nous nous proposons d'explorer une partie des talents de Maple en analyse, et de les mettre en œuvre pour résoudre certains des exercices proposés dans les feuilles « dérivation » et « développements limités ».
- Commencez par consulter l'aide sur la fonction `taylor`.

Développements limités, mini-problème 3

- Nous nous proposons de montrer que le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$ est $f(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4x^4}{189} + o(x^4)$.

Sans calculs, donnez un équivalent *simple* de $\sin^2(x) \times \mathrm{sh}^2(x)$ quand x tend vers 0. À quel ordre d faudra-t-il pousser les DL du numérateur et du dénominateur pour obtenir la réponse attendue ?
Déterminez les DL_d du numérateur et du dénominateur ; extrayez leurs parties régulières respectives, et divisez-les par x^d puis répondez à la question en effectuant un dernier DL.
Refaites le calcul sans Maple ; utilisez $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Développements limités, mini-problème 3, question 5

- Calculez $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \arctan(x) - \sin^2(x)}{x^6}$.

Définissez en Maple la fonction $f : x \mapsto x \arctan(x) - \sin^2(x)$. Évaluez numériquement $f(2\varepsilon)/f(\varepsilon)$, pour ε bien choisi (assez petit, mais pas trop). Modifiez au besoin la valeur de `Digits`. Une fois obtenus $k \in \mathbb{N}$ et λ tels que $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \lambda x^k$, vérifiez votre estimation avec `series` et `limit`, ou tout simplement avec `taylor`.

Développements limités : approximant de Padé

- Nous nous proposons de déterminer a, b réels tels que $\cos(x) - \dfrac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$ soit équivalent, quand $x \to 0$, à αx^k, avec $\alpha \neq 0$ et k naturel le plus grand possible.

Définissez en Maple la fonction $f : x \mapsto (1 + bx^2)\cos(x) - (1 + ax^2)$. Que pouvez-vous dire du $DL_n(0)$ de f ? Quel exposant k pouvez-vous espérer obtenir ? Demandez le DL avec `series` ; pour savoir comment extraire la partie régulière, consultez l'aide sur `convert/polynom`. Avec `op` ou `coeftayl`, récupérez les coefficients de 1 et de x^2 puis écrivez un système de deux équations aux deux inconnues a et b ; résolvez-le (aide sur `solve`). Substituez (aide sur `subs`) la solution obtenue dans l'expression de $f(x)$ et admirez le résultat. Tracez dans un même repère les courbes représentatives des restrictions de f et de $x \mapsto \alpha x^k$ à l'intervalle $[-10^k, 10^k]$ pour k valant successivement 1, 0, -1, -2 (modifiez en conséquence la valeur de `Digits`). Méditez le **caractère local** du DL.

Développement limité d'une réciproque

- Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x + x^3 + x^5$. Justifiez l'existence de f^{-1}, prouver que $f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminez le $DL_7(0)$ de f^{-1}. *Réponse :* $f^{-1}(x) = x - x^3 + 2x^5 - 4x^7 + o(x^7)$.

Reprenez les idées de l'exercice précédent : définissez $g : x \mapsto x + ax^3 + bx^5 + cx^7$, récupérez la partie utile dans $(g \circ f)(x)$ au moyen de `rem`. Construisez et résolvez le système d'équations. Rédigez alors un script dans lequel l'utilisateur doit juste introduire la valeur de n, pour obtenir ensuite le $DL_{2n+1}(0)$ de f^{-1}. Indication : considérez la séquence `a` des coefficients de la partie régulière de ce DL ; a_k est représenté en Maple par `op(k,a)` ou, plus commodément, par `a[k]`.

Une question de l'oral de l'ENSTIM

- Notons $k : x \mapsto \dfrac{x^3 \exp(1/x)}{x^2 + 1}$. Déterminez des réels a, b et c tels que $k(x) = ax + b + \dfrac{c}{x} + o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ lorsque x tend vers $+\infty$. *(Planche 323.II)*

Il ne s'agit plus d'un développement limité usuel, mais d'un développement limité généralisé, puisqu'on se place au voisinage de $+\infty$. Commencez par déterminer a à la main. Ensuite, procédez comme dans l'exercice précédent ; vous utiliserez `convert/polynom` et `coeff` ; cette dernière fonction a le bon goût de reconnaître les puissances négatives de x.