

## Mines PC

- On définit une suite  $u$  par la donnée de  $u_0 = 9$  et la relation de récurrence  $u_{n+1} = 4u_n^3 + 3u_n^4$ . On note  $c_n$  le nombre de chiffres 9 par lesquels se termine l'écriture décimale de  $u_n$ .

- Q1 Rédigez en Maple une fonction pour calculer  $u_n$ .
- Q2 Rédigez en Maple une fonction pour calculer  $c_n$ . Vous pourrez utiliser `convert`, avec l'option `base`, pour obtenir la représentation décimale de  $u_n$ ; le résultat obtenu étant une liste, vous consulterez au besoin l'aide en ligne sur ce sujet.
- Q3 En observant la valeur de  $c_n$  pour  $n \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$ , conjecturez une expression simple de  $c_n$ .
- Q4 Démontrez en toute rigueur votre conjecture.
- Q5 Pour  $n \geq 1$ , quel est le chiffre qui précède immédiatement la tranche finale de 9, dans l'écriture décimale de  $u_n$  ?
- On note  $p_n$  le nombre de chiffres de l'écriture décimale de  $u_n$ .
- Q6 Traduisez la définition de  $p_n$  par un encadrement de  $u_n$ .
- Q7 Justifiez les relations  $p_{n+1} \leq 4p_n + 1$  et  $p_{n+1} \geq 4p_n - 3$ .
- Q8 En déduire l'encadrement  $4^{n-1} \leq p_n \leq \frac{4^{n+1}}{3}$ .
- Q9 A-t-on  $p_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 4^n$  ?

À propos de l'écriture décimale de  $n!$ 

- Considérons la fonction suivante :

```
premier_indice := proc(p,x) local k,n;
  n := nops(x);
  for k from 1 to n do
    if p(x[k]) then RETURN(k) fi
  od;
  RETURN(-1)
end;
```

Cette fonction reçoit deux arguments :  $p$ , qui est un prédicat ; et  $x$ , qui est une liste ou un ensemble. Si l'un au moins des éléments de la liste ou de l'ensemble vérifie  $p$ , alors `premier_indice` renvoie le plus petit indice d'un tel élément ; sinon, elle renvoie la valeur  $-1$ .

- Q1 Comment modifier cette fonction pour qu'elle rende le *plus grand* indice d'un élément vérifiant  $p$  ?
- Q2 Comment modifier cette fonction pour qu'elle rende le *plus grand* indice d'un élément *ne vérifiant pas*  $p$  ?
- Notons  $c_n$  le premier chiffre non nul, lorsqu'on lit l'écriture décimale de  $n!$  en partant de la droite. Par exemple,  $c_{23} = 4$  car  $23! = 25852016738884976640000$ . Nous nous proposons d'étudier la suite de terme général  $c_n$ . Dans un premier temps, nous allons écrire une fonction Maple pour calculer  $c_n$ .
- Q3 Soient  $x = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$  une liste et  $p$  un prédicat. Rédigez une fonction Maple `dropwhile` qui élimine le plus long bloc consécutif d'éléments en tête de la liste  $x$  vérifiant le prédicat  $p$ . Par exemple :
- ```
dropwhile(isprime, [7,2,3,17,12,7,8,13])
```
- rendra la liste  $[12,7,8,13]$ .
- Q4 Utilisez cette fonction, `convert/base` et la fonction « factorielle » intégrée dans Maple pour rédiger la fonction `c`.
- Q5 Affichez la suite  $(c_n)_{0 \leq n \leq 100}$ .
- Q6 Expliquez pourquoi  $c_n$  est pair pour  $n \geq 2$ .