TD Maple : quelques exercices

Mines PC

► On définit une suite u par la donnée de $u_0 = 9$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 4{u_n}^3 + 3{u_n}^4$. On note c_n le nombre de chiffres 9 par lesquels se termine l'écriture décimale de u_n.

Q1 Rédigez en Maple une fonction pour calculer u_n.

Q2 Rédigez en Maple une fonction pour calculer c_n. Vous pourrez utiliser `convert`, avec l'option `base`, pour obtenir la représentation décimale de u_n ; le résultat obtenu étant une liste, vous consulterez au besoin l'aide en ligne sur ce sujet.

Q3 En observant la valeur de c_n pour $n \in [\![0,4]\!]$, conjecturez une expression simple de c_n.

Q4 Démontrez en toute rigueur votre conjecture.

Q5 Pour $n \geqslant 1$, quel est le chiffre qui précède immédiatement la tranche finale de 9, dans l'écriture décimale de u_n ?

► On note p_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de u_n.

Q6 Traduisez la définition de p_n par un encadrement de u_n.

Q7 Justifiez les relations $p_{n+1} \leqslant 4p_n + 1$ et $p_{n+1} \geqslant 4p_n - 3$.

Q8 En déduire l'encadrement $4^{n-1} \leqslant p_n \leqslant \dfrac{4^{n+1}}{3}$.

Q9 A-t-on $p_n \underset{n\to\infty}{\sim} 4^n$?

À propos de l'écriture décimale de $n!$

► Considérons la fonction suivante :

```
premier_indice := proc(p,x) local k,n;
 n := nops(x);
 for k from 1 to n do
  if p(x[k]) then RETURN(k) fi
 od;
 RETURN(-1)
end;
```

Cette fonction reçoit deux arguments : p, qui est un prédicat ; et x, qui est une liste ou un ensemble. Si l'un au moins des éléments de la liste ou de l'ensemble vérifie p, alors `premier_indice` renvoie le plus petit indice d'un tel élément ; sinon, elle renvoie la valeur -1.

Q1 Comment modifier cette fonction pour qu'elle rende le *plus grand* indice d'un élément vérifiant p ?

Q2 Comment modifier cette fonction pour qu'elle rende le *plus grand* indice d'un élément *ne vérifiant pas p* ?

► Notons c_n le premier chiffre non nul, lorsqu'on lit l'écriture décimale de $n!$ en partant de la droite. Par exemple, $c_{23} = 4$ car $23! = 25852016738884976640000$. Nous nous proposons d'étudier la suite de terme général c_n. Dans un premier temps, nous allons écrire une fonction Maple pour calculer c_n.

Q3 Soient $x = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une liste et p un prédicat. Rédigez une fonction Maple `dropwhile` qui élimine le plus long bloc consécutif d'éléments en tête de la liste x vérifiant le prédicat p. Par exemple :

`dropwhile(isprime,[7,2,3,17,12,7,8,13])`

rendra la liste `[12,7,8,13]`.

Q4 Utilisez cette fonction, `convert/base` et la fonction « factorielle » intégrée dans Maple pour rédiger la fonction `c`.

Q5 Affichez la suite $(c_n)_{0\leqslant n\leqslant 100}$.

Q6 Expliquez pourquoi c_n est pair pour $n \geqslant 2$.