TD Maple : miroir, palindromes, itération…

Présentation

- Considérons le nombre 78. Ajoutons-lui son « miroir » 87, nous obtenons 165 ; ajoutons à celui-ci son miroir 561, nous obtenons 726 ; en continuant ainsi, nous obtenons 1353 et 4884. Nous remarquons que ce dernier nombre est son propre miroir : nous dirons qu'il est *palindrome*.
- Nous nous proposons d'explorer quelques aspects du mécanisme que nous venons de décrire sur un exemple ; au passage, nous réviserons certains points de programmation en Maple et en découvrirons de nouveaux.

Listes

Q1 Consultez l'aide sur les listes (mot-clé `list`) pour savoir comment construire une liste, coment obtenir le nombre de ses éléments, et comment obtenir un élément à partir de son indice.

Q2 Proposez deux méthodes différentes pour obtenir l'avant-dernier élément d'une liste de longueur au moins égale à 2 : en utilisant `nops`, ou en utilisant un sélecteur négatif.

- Le *miroir* de la liste $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ est la liste $[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1]$. La liste vide [ ] est son propre miroir.

Q3 Nanti des précieux renseignements précédents, vous pouvez maintenant rédiger une fonction `miroir_liste` qui construit la liste miroir d'une liste donnée. Par exemple, `miroir_liste([7,1,5])` doit rendre la liste `[5,1,7]`.

Miroir d'un nombre

- Le miroir du naturel n sera noté $\overleftarrow{n}$; par exemple, $\overleftarrow{1789} = 9871$.

Q4 Consultez l'aide sur la fonction `convert/base` pour savoir comment obtenir rapidement l'écriture décimale d'un naturel. Dans quel ordre est-elle obtenue ?

Q5 Rédigez une fonction `deconvert` qui prend l'écriture décimale d'un naturel n, fournie comme liste de chiffres, et rend n. Par exemple, `deconvert([2,8,3])` doit rendre 382.

Q6 Rédigez maintenant une fonction `miroir_nombre` qui, appliquée à un naturel n, rend son miroir $\overleftarrow{n}$.

Q7 Rédigez alors une fonction `est_palindrome` qui, appliquée à un naturel n, dit si ce nombre est palindrome.

Q8 Combien existe-t-il de nombres palindromes, dont l'écriture décimale requiert exactement c chiffres ? Vérifiez le résultat pour $c = 3$ puis $c = 4$.

Étude d'une fonction itérable sur les naturels

Q9 Rédigez une fonction f qui appliquée au naturel n, calcule $n + \overleftarrow{n}$.

- Soit n un naturel ; notons $E(n) = \{k \in \mathbb{N} \mid f^k(n) = \overleftarrow{f^k(n)}\}$ l'ensemble (éventuellement vide) des exposants k tels que $f^k(n)$ soit palindrome (il s'agit bien entendu d'exposants d'itération). Nous dirons que le naturel n est *mortel* si $E(n)$ n'est pas vide ; la *durée de vie* de n est alors le plus petit élément $\delta(n)$ de $E(n)$. Par exemple, $\delta(n) = 0$ ssi n est un palindrome, et $\delta(78) = 4$. Si $E(n)$ est vide, nous dirons que n est *immortel*.

Q10 Justifiez l'affirmation suivante : si n n'est pas mortel, alors $\delta(n) = 1 + \delta\big(f(n)\big)$.

Q11 Rédigez une fonction `duree_de_vie` qui calcule la durée de vie du naturel n.

Q12 Quelle est la durée de vie maximale d'un naturel compris entre 1 et 100 ?

Q13 Consultez l'aide sur `plot/style` pour savoir comment représenter un nuage de points. Représentez alors le nuage de points $\big(n, \delta(n)\big)_{1 \leqslant n \leqslant 100}$.

Q14 Déterminez le plus petit naturel qui est *peut-être* immortel. Déterminez également le suivant.